

Lösungen 10. Übungsblatt Lineare Optimierung

1. Aufgabe: Wir teilen die letzte Ungleichung durch 5. Die Standard-Gleichungsform lautet dann (erst teilen, dann die Standard-Gleichungsform nehmen; geht auch ohne teilen, aber dann würden mehr Brüche in der folgenden Rechnung auftreten):

$$F(x, y, s_1, s_2, s_3) = x + 4y + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \rightarrow \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$5x + 3y + s_1 = 60$$

$$x + 2y + s_2 = 20$$

$$y + s_3 = 8$$

und

$$x, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

Damit erhalten wir folgendes Start-Tableau:

$$\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & F \end{array}$$

Offensichtlich ist $\vec{x}_0 = (0, 0, 60, 20, 8)$ eine Start-Ecke und damit

$$B = B_0 = \{3, 4, 5\}, \quad N_0 = \{1, 2\}$$

eine Start-Basis. Weiter ist $\vec{c}_B = \vec{0}$ und damit $\Delta F_N = \vec{c}_N = (1, 4)$ und damit ist $i_p = 2$ oder im Folgenden schreiben wir einfach $i = 2$ entering index. Den leaving index j_q oder im Folgenden einfach j bestimmen wir aus dem Tableau

$$\begin{array}{ccccc|c} & & & & & \lambda \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 60 & 20 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & 8 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & F & \end{array}$$

Also $j = 5$ ist leaving index. Damit:

$$B = B_1 = \{2, 3, 4\}, \quad N_0 = \{1, 5\}$$

Wir wenden den Gauss-Algorithmus an, um $\vec{c}_B = \vec{0}$ zu erreichen und A_B eine Permutation der Einheits-Matrix:

$$\begin{array}{ccccc|c}
5 & 0 & 1 & 0 & -3 & 36 \\
1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -4 & \text{F-32}
\end{array}$$

Damit haben wir $i = 1$ als entering index und bestimmen den leaving index aus dem Tableau

$$\begin{array}{ccccc|c}
5 & 0 & 1 & 0 & -3 & 36 & \lambda \\
1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 7\frac{1}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & 4 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -4 & \text{F-32} & \infty
\end{array}$$

Also $j = 4$ ist leaving index und damit

$$B = B_2 = \{1, 2, 3\}, \quad N_0 = \{4, 5\}$$

Wir wenden den Gauss-Algorithmus an, um $\vec{c}_B = \vec{0}$ zu erreichen und A_B eine Permutation der Einheits-Matrix:

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 1 & -5 & 7 & 16 \\
1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & -2 & \text{F-36}
\end{array}$$

Alle Koeffizienten von ΔF_N sind jetzt negativ und damit haben wir das Maximum erreicht. Also

$$\vec{x}_{\text{opt}} = (x, y, s_1, s_2, s_3)_{\text{opt}} = (4, 8, 16, 0, 0)$$

und

$$F_{\text{opt}} = F(4, 8) = 4 + 4 \times 8 = 36.$$

Den Optimalwert von 36 kann man auch direkt aus dem End-Tableau in der letzten Zeile ablesen, da diese ganz rechts immer von der Form $F - F_{\text{opt}}$ sein muss.

2.Aufgabe: Die Standard-Gleichungsform lautet:

$$F(x, y, z, s_1, s_2, s_3) = 3x + 2y - 4z + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \rightarrow \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
x + 4y + s_1 &= 5 \\
2x + 4y - 2z + s_2 &= 6 \\
x + y - 2z + s_3 &= 2 \\
x, y, z, s_1, s_2, s_3 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgende Sequenz von Simplex-Iterationen mit den folgenden Tableaus:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
 \hline
 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & F
 \end{array}$$

$$B = B_0 = \{4, 5, 6\}, \quad N_0 = \{1, 2, 3\}$$

$i = 1$ ist entering index,

$$\begin{array}{cccccc|c}
 & & & & & & \lambda \\
 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 \\
 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 \\
 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
 \hline
 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & F &
 \end{array}$$

und $j = 6$ ist leaving index,

$$B = B_1 = \{1, 4, 5\}, \quad N_1 = \{2, 3, 6\}$$

Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\
 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
 \hline
 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -3 & F-6
 \end{array}$$

$i = 3$ ist entering index und

$$\begin{array}{cccccc|c}
 & & & & & & \lambda \\
 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 3/2 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\
 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & \infty \\
 \hline
 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -3 & F-6 &
 \end{array}$$

und $j = 5$ ist leaving index,

$$B = B_2 = \{1, 3, 4\}, \quad N_2 = \{2, 5, 6\}$$

Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1 \\
 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
 \hline
 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & -1 & F-8
 \end{array}$$

Alle Koeffizienten in der letzten Zeile sind negativ, also haben wir das Maximum erreicht:

$$\vec{x}_{\text{opt}} = (x, y, z, s_1, s_2, s_3)_{\text{opt}} = (4, 0, 1, 1, 0, 0)$$

und

$$F_{\text{opt}} = F(4, 0, 1) = 3 \times 4 + 2 \times 0 - 4 \times 1 = 12 - 4 = 8.$$