2.6 Unendliche Reihen

In normierten Räumen steht das wichtige Werkzeug der Bildung von unendlichen Reihen zur Verfügung. Man denke in diesem Zusammenhang daran, dass man in der Analysis Potenz- und Fourierreihen nur mit Hilfe dieses Werkzeugs definieren kann.

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zu jeder Folge (x_k) lassen sich die *Partialsummen*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$$

bilden. Diese liefern eine weitere Folge (s_n) in X, mit deren Konvergenz wir uns nun befassen wollen.

Definition 80: *Die Folge (s_n) der Partialsummen einer Folge (x_k) nennt man eine (unendliche) Reihe in X und bezeichnet sie mit dem Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n =: s$, so nennt man die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergent und schreibt auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = s$.*

Anmerkung: Die Schreibweise $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = s$ ist ein zwar intuitiv aber ein Missbrauch mathematischer Sprache, da die linke Seite dieser Gleichung nach Definition eine Folge und die rechte Seite eine Zahl ist.

Feststellung 81: *Für eine unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, so ist $(\|x_k\|)$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.*
2. *Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ in $\mathbb{R}$, so konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ und es gilt $\|\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.*

Beweis: 1. Nach dem Cauchykriterium gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|s_n - s_m\| < \epsilon$ falls $n, m > N$. Insbesondere gilt das für $n > N$ und $m = n + 1$, woraus die Behauptung folgt.

2. Die Dreiecksungleichung liefert

$$\|\sum_{k=1}^{n} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

Übergang zum Grenzwert $n \to \infty$ auf beiden Seiten der Ungleichung und Nutzung der Stetigkeit der Norm liefern die Behauptung. □

Konvergente Reihen, die die Bedingung 2 in Feststellung 81 erfüllen nennt man *absolut konvergent*. Nicht jede konvergente Reihe ist auch absolut konvergent, wie bereits aus der Analysis bekannt ist. Mit Hilfe von Punkt 2 lässt sich die Konvergenzuntersuchung einer Reihe in einem normierten Raum eventuell auf die Konvergenzuntersuchung einer reellen unendlichen Reihe zurückführen. Das ist sehr nützlich, da man für reelle Reihen viele Konvergenzkriterien kennt. Wir betrachten einen für die Anwendung besonders relevanten Fall:

SATZ 82 (Wurzelkriterium): *Es sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ eine Reihe in dem Banachraum X und*

$$\alpha := \limsup(\sqrt[k]{\|x_k\|} : k \in \mathbb{N}).$$

Dann ist die Reihe konvergent, falls $\alpha < 1$ und divergent im Fall $\alpha > 1$.

BEWEIS: Aus der Analysis kennt man die Aussage des Satzes für die reelle Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$. Nun muss man nur Punkt 2 von Feststellung 81 anwenden. □

Motiviert durch die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k, \quad q \in (-1, 1),$$

betrachten wir zu einem Operator $T \in L(X, X)$ die Operatoren

$$T^k = T \circ T \circ \ldots \circ T \ (k\text{-mal}), \ T^0 := \mathrm{id}\,,$$

und nehmen an, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k \tag{40}$$

in $\mathrm{L}(X,X)$ absolut gegen den Grenzwert $S \in \mathrm{L}(X,X)$ konvergiert. Dann gilt wegen der Stetigkeit der Verknüpfung von Operatoren

$$S \circ (\mathrm{id}\, - T) = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k - T^{k+1}) = \mathrm{id}$$

und

$$(\mathrm{id}\, - T) \circ S = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k - T^{k+1}) = \mathrm{id}\,,$$

das heißt id $-T$ besitzt die stetige Inverse S. Es stellt sich jetzt also die Frage unter welchen Voraussetzungen die Reihe (40) konvergiert. Hierzu wendet man das Wurzelkriterium an: Nach Feststellung 75 gilt

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k$$

also existiert der Limes superior im Satz 82 und es gilt

$$\limsup(\sqrt[k]{\|T_k\|} : k \in \mathbb{N}) \leq \|T\|.$$

Zusammenfassend erhalten wir den folgenden

Satz 83 (C. Neumann): *Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathrm{L}(X,X)$ habe die Eigenschaft, dass die Neumann'sche Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

absolut konvergiert. Dann besitzt id $- T$ *die stetige Inverse*

$$(\mathrm{id}\, - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Die Neumann'sche Reihe konvergiert, falls $\limsup(\sqrt[k]{\|T^k\|} : k \in \mathbb{N}) < 1$ *gilt, insbesondere also falls* $\|T\| < 1$ *ist. Im letzteren Fall gilt die Ungleichung*

$$\|(\mathrm{id}\, - T)^{-1}\| = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Volterra'sche Integralgleichungen

[Herleitung aus einem physikalischen Problem – fehlt noch.]

Eine Integralgleichung der Form

$$x(s) - \int_0^s k(s,t)x(t)dt = y(s) \tag{41}$$

mit

- $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ einer gegebenen reellen Funktion,
- $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ einer gegebenen reellen Funktion zweier Variabler, dem so genannten Kern,
- $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ der gesuchten Lösungsfunktion,

wird als Volterra'sche Integralgleichung bezeichnet.

Nimmt man an, dass die Abbildung

$$k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$$

stetig ist, so kann man den Operator

$$K : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}),\ x \mapsto \int_a^s k(s,t)x(t)dt \tag{42}$$

definieren, mit dessen Hilfe sich die Integralgleichung (41) in der Form

$$(\mathrm{id} - K)(x) = y \tag{43}$$

schreiben lässt.

Der Operator K ist offensichtlich linear. Weiter gilt

$$|K(x)(s)| \leq (s-a)\|k\|_{\max}\|x\|_{\max},$$

woraus

$$\|K(x)\|_{\max} \leq (b-a)\|k\|_{\max}\|x\|_{\max},$$

wobei $\|k\|_{\max}$ die Supremumsnorm von k in dem normierten Raum $C([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$ und $\|x\|_{\max}$ die Supremumsnorm von x in dem normierten Raum $C([a,b],\mathbb{R})$ bezeichnet. Für die Operatornorm von K folgt

$$\begin{aligned} \|K\| &= \sup(\|K(x)\|_{\max} : x \in C([a,b],\mathbb{R}),\ \|x\|_{\max} = 1) \\ &\leq (b-a)\|k\|_{\max}; \end{aligned}$$

insbesondere ist K stetig.

Um den Satz von Neumann anwenden zu können müssen auch die Werte $\|K^m\|$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
|K^2(x)(s)| &= |\int_a^s k(s,t)K(x)(t)dt| \\
&\leq \int_a^s |k(s,t)||K(x)(t)|dt \\
&\leq \int_a^s \|k\|_{\max}^2 \|x\|_{\max}(t-a)dt = \tfrac{1}{2}\|k\|_{\max}^2\|x\|_{\max}(s-a)^2.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\|K^2\| \leq \frac{1}{2}\|k\|_{\max}^2(b-a)^2.$$

Rekursiv erhält man so:

$$\|K^m\| \leq \frac{1}{m!}\|k\|_{\max}^m(b-a)^m.$$

Nun ist

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m!}\|k\|_{\max}^m(b-a)^m} = \frac{1}{\sqrt[m]{m!}}\|k\|_{\max}(b-a).$$

Man muss also das Verhalten der Größe $\sqrt[m]{m!}$ für $m \to \infty$ untersuchen: Logarithmieren liefert

$$\log(\sqrt[m]{m!}) = \frac{1}{m}(\sum_{k=1}^m \log(k)).$$

Die Summe in Klammern kann man also Untersumme für das Integral $\int_1^m \log(t)\,dt$ deuten, für welches gilt:

$$\int_1^m \log(t)\,dt = m\log(m) - m + 1.$$

Es folgt

$$\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^m \log(k)) \leq \frac{1}{m}(m\log(m) - m + 1) = \log(m) - 1 + \frac{1}{m}.$$

Die Werte von $\sqrt[m]{m!}$ streben folglich für $m \to \infty$ gegen ∞, womit der Satz von Neumann anwendbar ist:

Korollar 84: *Die Volterra'sche Integralgleichung (41) besitzt bei stetigem Kern k für jede stetige rechte Seite y eine eindeutige stetige Lösung x.*

Die Gruppe der invertierbaren stetigen linearen Selbstabbildungen

Die obigen Ergebnisse zur Volterra'schen Integralgleichung motivieren die folgende Frage: Bleibt die Invertierbarkeit eines Operators $S \in L(X, X)$ bei im Sinn der Operatornorm »kleinen« Störungen erhalten? Mit solchen Störungen muss man nämlich rechnen, wenn man den Kern k der Volterra'schen Integralgleichung per Messung/Experiment bestimmen muss, wie das in vielen praktischen Situationen normal ist.

Es sei also $S_0 \in L(X, X)$ invertierbar. Ein beliebiges $S \in L(X, X)$ kann dann in der Form

$$S = S_0 - (S_0 - S) = S_0 \circ (\mathrm{id} - S_0^{-1} \circ (S_0 - S)) \tag{44}$$

geschrieben werden. Ist dann

$$\|S - S_0\| < \frac{1}{\|S_0^{-1}\|},$$

so folgt

$$\|S_0^{-1} \circ (S_0 - S)\| \leq \|S_0^{-1}\| \|S_0 - S\| < 1,$$

wobei man Satz 75 benutzt. Nach dem Satz von Neumann ist also $\mathrm{id} - S_0^{-1} \circ (S_0 - S)$ invertierbar, und damit auch S selbst, da S dann nach Gleichung (44) die Verkettung zweier invertierbarer Operatoren ist.

Man sieht weiter:

$$\begin{aligned} S^{-1} &= (\mathrm{id} - S_0^{-1} \circ (S_0 - S))^{-1} \circ S_0^{-1} \\ &= (\sum_{k=0}^{\infty} (S_0^{-1} \circ (S_0 - S))^k) \circ S_0^{-1} \\ &= S_0^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (S_0^{-1} \circ (S_0 - S))^k \circ S_0^{-1}, \end{aligned}$$

wobei man die Stetigkeit von $\circ$ (Satz 75) benutzt. Es folgt

$$\begin{array}{rcl} \|S^{-1} - S_0^{-1}\| & = & \|\sum\limits_{k=1}^{\infty}(S_0^{-1} \circ (S_0 - S))^k \circ S_0^{-1}\| \\ & \leq & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|(S_0^{-1} \circ (S_0 - S))^k \circ S_0^{-1}\| \\ & \leq & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|(S_0^{-1} \circ (S_0 - S))\|^k \circ \|S_0^{-1}\| \\ & = & (\frac{1}{1-\|(S_0^{-1}\circ(S_0-S))\|} - 1)\|S_0^{-1}\| \\ & = & \frac{\|(S_0^{-1}\circ(S_0-S))\|}{1-\|(S_0^{-1}\circ(S_0-S))\|}\|S_0^{-1}\| \end{array}$$

Da die rechte Seite klein wird, wenn man S nahe bei S_0 wählt, ergibt sich insgesamt:

SATZ 85: *Für einen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ ist die Gruppe $L(X,X)^\times$ der stetigen Operatoren mit stetiger Inversen eine offene Teilmenge des normierten Raums $L(X,X)$ und die Abbildung*

$$L(X,X)^\times \to L(X,X)^\times,\ S \mapsto S^{-1}$$

ist stetig.

Quantitativ: Zu jedem $S_0 \in L(X,X)^\times$ gilt

$$B(S_0, \frac{1}{\|S_0^{-1}\|}) \subseteq L(X,X)^\times.$$

Als Folgerung ergibt sich für die Volterra'sche Integralgleichung: Die eindeutige Lösbarkeit der Volterra'schen Integralgleichung bei stetigem Kern und stetiger rechter Seite bleibt bei »kleinen« Störungen des Kerns k erhalten.