## 2.5 Normierte Räume endlicher Dimension

Es sei $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine lineare Abbildung. Die Komponentenabbildungen $T_k : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, m$, haben bekanntlich die Form

$$T_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i$$

mit gewissen durch $T$ und die in $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ gewählten Basen eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_{ki} \in \mathbb{K}$. Es ist sehr leicht zu beweisen, dass $T$ stetig ist, wenn man auf $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ jeweils die 1-Norm $\|\cdot\|_1$ betrachtet. Nach Korollar 34 ist dann $T$ stetig bezüglich jeder $p$-Norm. Diese Sachverhalte sollen im Folgenden auf beliebige normierte Räume endlicher Dimension verallgemeinert werden. Wie im Fall des $\mathbb{K}^n$ ist es hierzu nötig den Zusammenhang zwischen der Konvergenz einer Folge $(x_k)$ eines normierten Raums $X$ und der Konvergenz der Koeffizientenfolgen in einer Darstellung $x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_i$ der Folgenglieder als Linearkombination einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ zu verstehen. Hierzu trägt der nächste Satz bei:

Satz 76: *Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $X$. Es sei $(x_k)$ eine Folge in $X$ mit $x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_i$. Dann ist die Folge $(x_k)$ genau dann konvergent, wenn die Koeffizientenfolgen $(a_{ik})$, $i = 1, \ldots, n$, in $\mathbb{K}$ konvergent sind, und es gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sum_{i=1}^{n} (\lim_{k\to\infty} a_{ik}) b_i.$$

Beweis: Man zeigt zunächst, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, für die die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq C \| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \| \tag{38}$$

für beliebige Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ gilt. Dazu betrachtet man die Abbildung

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R},\ (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \|,$$

wobei man $\mathbb{K}^n$ mit der 1-Norm $\|\cdot\|_1$ versieht. $f$ ist wegen der Stetigkeit der Rechenoperationen und der Stetigkeit der Norm selbst stetig. Die Menge

$$S^1 := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{k=1}^{n} |a_k| = 1\}$$

ist beschränkt und nach Satz 26 als Urbild $\|\{1\}\|_1^{-1}$ der stetigen Normfunktion abgeschlossen. Folglich ist $S^1$ nach Satz 41 kompakt, womit nach Korollar 43 $f$ auf $S^1$ ein Maximum besitzt:

$$f(a_1, \ldots, a_n) \geq c = \|\sum_{k=1}^{n} c_k b_k\|$$

für ein $c \geq 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der $b_k$ gilt $c > 0$, womit

$$1 \leq c^{-1} f(a_1, \ldots, a_n) \tag{39}$$

also die Behauptung (38) auf $S^1$ folgt. Für beliebige $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus 0$ wendet man das bereits Gezeigte auf den Koeffizientenvektor

$$(a_1', \ldots, a_n') := \frac{1}{|a_1| + \ldots + |a_n|)}(a_1, \ldots, a_n) \in S^1$$

an, und erhält durch Multiplikation mit $|a_1| + \ldots + |a_n|$ aus der Ungleichung (39) die Behauptung (38).

Die Stetigkeit der Rechenoperationen zeigt, dass die Konvergenz der Koeffizientenfolgen $(a_{ik})$ die Konvergenz der Folge $(x_k)$ nach sich zieht, und die angegebene Grenzwertformel gilt.

Ist andererseits $(x_k)$ konvergent mit Grenzwert $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, so liefert die Ungleichung (38) angewandt auf die Folge $(x_k - x)$, dass alle Koeffizientenfolgen $(a_{ik} - a_i)$ Nullfolgen sind. □

Korollar 77: *Es seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $X$. Eine Folge $(x_k)$ in $X$ konvergiert genau dann bezüglich $\|\cdot\|_1$, wenn sie bezüglich $\|\cdot\|_2$ konvergiert. Die jeweiligen Grenzwerte stimmen überein.*

Beweis: Nach Satz 76 hängen Konvergenz und Grenzwert nur von der Konvergenz und den Grenzwerten der Koeffizientenfolgen bezüglich einer Basis von $X$ ab, und diese sind unabhängig von der jeweiligen Norm. $\square$

Für angewandte Mathematiker ist Korollar 77 interessant, weil es das sogenannte »norm switching« begründet: Kommt man in einer bestimmten Problemstellung mit einer gegebenen Norm nicht klar, so kann man zu einer anderen übergehen ohne Konvergenz- oder Stetigkeitseigenschaften zu verlieren.

Satz 78: *Ein endlichdimensionaler normierter Raum ist vollständig. Ein endlichdimensionaler Unterraum eines normierten Raums ist abgeschlossen.*

Beweis: Die Ungleichung (38) zeigt, dass die Koeffizientenfolgen $(a_{ik})$ einer Cauchyfolge $(x_k)$ in einem endlichdimensionalen normierten Raum Cauchyfolgen sind. Damit konvergieren sie wegen der Vollständigkeit von $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, womit auch $(x_k)$ nach Satz 76 konvergiert. Die verbleibende Behauptung folgt aus Satz 14. $\square$

Satz 79: *Jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ eines endlichdimensionalen normierten Raums $X$ in einen beliebigen normierten Raum $Y$ ist stetig.*

Beweis: Es sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $X$ und $(x_k)$ eine konvergente Folge in $X$ mit $x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_i$ und $x := \lim_{k\to\infty} x_k = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Dann gilt wegen der Linearität von $T$:

$$T(x_k) - T(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} T(b_i) - \sum_{i=1}^{n} a_i T(b_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ik} - a_i) T(b_i).$$

Nach Ungleichung (38) sind die Folgen $(a_{ik} - a_i)$ Nullfolgen, womit die Stetigkeit der Rechenoperationen

$$\lim_{k\to\infty} (T(x_k) - T(x)) = 0$$

also die behauptete Stetigkeit von $T$ im Punkt $x$ liefert. $\square$