## 2.4 Stetige lineare Abbildungen

Eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \ldots + a_1 f^{(1)} + a_0 f = g, \quad a_0, \ldots, a_{n-1}, g \in \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R}),$$

zu der Lösungen $f \in \mathrm{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ gesucht werden. Führt man die Abbildung

$$T : \mathrm{C}^n([a,b],\mathbb{R}) \to \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \ldots + a_1 f^{(1)} + a_0 f$$

ein, so lässt sich die diese Differentialgleichung kurz als

$$T(f) = g$$

schreiben. Bemerkenswert ist dabei, dass $T$ die beiden Eigenschaften $T(f_1+f_2) = T(f_1)+T(f_2)$ und $T(\lambda f) = \lambda T(f)$ für alle $f_1, f_2, f \in \mathrm{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ besitzt. Dieses Beispiel zeigt, dass die Untersuchung linearer Abbildungen zwischen normierten Räumen hohe Bedeutung für die angewandte Mathematik besitzt.

### Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $T : X \to Y$ zwischen den $\mathbb{K}$-Vektorräumen $X$ und $Y$ heißt linear, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

$L_1$: $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in X \quad T(\alpha x) = \alpha T(x)$,

$L_2$: $\forall x_1, x_2 \in X \quad T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$.

Statt von linearen Abbildungen spricht man in der Funktionalanalysis oft von linearen Operatoren. Grundlegende Eigenschaften linearer Operatoren, wie aus der linearen Algebra bekannt, sind:

Satz 67: *Es sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator.*

1. *Der Kern von $T$ ist die Menge* $\mathrm{Ker}\,(T) := \{x \in X : T(x) = 0\}$. *Sie ist ein Untervektorraum von $X$.*

2. *Das Bild von $T$ ist die Menge $T(X) := \{T(x) : x \in X\}$. Sie ist ein Untervektorraum von $Y$.*

3. *$T$ ist injektiv genau dann, wenn* $\mathrm{Ker}\,(T) = 0$ *gilt.*

4. *Ist $S : Y \to Z$ ein weiterer linearer Operator, so ist die Verkettung $S \circ T : X \to Z$ ein linearer Operator.*

5. *Ist $T$ bijektiv, so ist die inverse Abbildung $T^{-1} : Y \to X$ linear.*

Wie nun schon gewohnt, betrachtet man in der Funktionalanalysis nicht (nur) einzelne lineare Operatoren, sondern Mengen von solchen. Daher hält man zunächst fest:

FESTSTELLUNG 68: *Die Menge* $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$ *aller linearen Operatoren* $T : X \to Y$ *ist ein Untervektorraum von* $\mathrm{Abb}\,(X, Y)$.

BEWEIS: Es seien $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}\,(X, Y)$, dann gilt für die punktweise Summe $T_1 + T_2$:

$$\begin{array}{rcl}(T_1 + T_2)(x_1 + x_2) & = & T_1(x_1 + x_2) + T_2(x_1 + x_2) \\ & = & T_1(x_1) + T_1(x_2) + T_2(x_1) + T_2(x_2) \\ & = & (T_1 + T_2)(x_1) + (T_1 + T_2)(x_2).\end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl}(T_1 + T_2)(\alpha x) & = & T_1(\alpha x) + T_2(\alpha x) \\ & = & \alpha T_1(x) + \alpha T_2(x) \\ & = & \alpha(T_1(x) + T_2(x)) \\ & = & \alpha(T_1 + T_2)(x).\end{array}$$

Die Eigenschaft $\alpha T \in \mathrm{Hom}\,(X, Y)$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $T \in \mathrm{Hom}\,(X, Y)$ rechnet man genauso direkt nach. □

## STETIGKEIT

Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist bekanntlich stets durch eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gegeben: $T(x) = Ax$. Stattet man $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ jeweils mit einer beliebigen $p$-Norm aus (siehe Beispiel 24), so lässt sich hieraus leicht schließen, dass $T$ stetig ist. Überraschenderweise sind lineare Operatoren zwischen beliebigen normierten Räumen nicht immer stetig: Man betrachte den Differentialoperator

$$D : \mathrm{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R}) \to \mathrm{C}([0, 2\pi], \mathbb{R}),\ f \mapsto \frac{df}{dt}.$$

Die Folge $(f_k)$, $f_k(t) := \frac{\sin(kt)}{\sqrt{k}}$ konvergiert gegen die Nullfunktion, denn es gilt:

$$\max(|\frac{\sin(kt)}{\sqrt{k}}| : t \in [0, 2\pi]) = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Nun gilt $D(f_k) = \sqrt{k}\cos(kt)$, womit der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} D(f_k)(0)$ nicht existiert. Folglich ist die Folge $(D(f_k))$ nach Feststellung 47 nicht konvergent, und $D$ daher nicht stetig im Punkt 0.

Wir müssen uns nun also die Frage stellen, unter welchen Voraussetzungen ein linearer Operator $T : X \to Y$ zwischen normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ stetig ist.

Es sei $T$ im Punkt $x_0 \in X$ stetig und $x' \in X$ sei ein beliebiger weiterer Punkt. Weiter sei $(x'_k)$ eine konvergente Folge in $X$ mit Grenzwert $x'$. Wegen der Stetigkeit der Addition ist dann die Folge $(x'_k + (x_0 - x'))$ konvergent mit Grenzwert $x_0$. Es folgt

$$\begin{aligned} T(x_0) &= \lim_{k\to\infty} T(x'_k + (x_0 - x')) && (T \text{ stetig in } x_0) \\ &= \lim_{k\to\infty} (T(x'_k) + T(x_0) - T(x')) && (\text{Linearität von } T) \\ &= \lim_{k\to\infty} T(x'_k) + T(x_0) - T(x') && (\text{Stetigkeit von } +), \end{aligned}$$

und damit

$$T(x') = \lim_{k\to\infty} T(x'_k).$$

Da die Folge $(x'_k)$ beliebig war, ergibt sich die Stetigkeit von $T$ im Punkt $x'$. Wir haben also die etwas überraschende Eigenschaft gezeigt: Ist $T$ in einem Punkt stetig, so ist $T$ in jedem Punkt stetig. Es genügt folglich Kriterien für die Stetigkeit von $T$ im Punkt 0 zu finden. Um hierfür eine Idee zu bekommen, nimmt man an $T$ sei im Punkt 0 stetig und betrachtet das $\epsilon$-$\delta$-Kriterium für Stetigkeit: Zu $\epsilon = 1$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $\|T(x)\|_Y < 1$ für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X < \delta$. Für ein beliebiges $x \neq 0$ folgt dann

$$\|T(\frac{\delta x}{2\|x\|_X})\|_Y < 1,$$

da

$$\|\frac{\delta x}{2\|x\|_X}\|_X = \frac{\delta\|x\|_X}{2\|x\|_X} = \frac{\delta}{2}.$$

Die Linearität von $T$ liefert

$$\|T(x)\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X.$$

Für $x, x' \in X$ ergibt sich also:

$$\|T(x) - T(x')\|_Y = \|T(x - x')\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\|x - x'\|_X,$$

das heißt $T$ ist dehnungsbeschränkt. Damit wurden die wesentlichen Aussagen des folgenden grundlegenden Satzes bewiesen:

SATZ 69: *Für einen linearen Operator $T : X \to Y$ zwischen normierten Räumen sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$T$ ist stetig im Punkt* 0.
2. *$T$ ist stetig.*
3. *$T$ ist dehnungsbeschränkt.*

BEWEIS: Die Implikationen 1. ⇒ 2. und 1. ⇒ 3. wurden bereits bewiesen. Da dehnungsbeschränkte Abbildungen stetig sind, gilt auch 3. ⇒ 1.. Die Implikation 2. ⇒ 1. gilt nach Definition. □

Die Menge $\mathrm{Hom}\,(X, Y) \cap C(X, Y)$ ist nach Satz 63 und Feststellung 68 ein Untervektorraum. Satz 69 legt also nahe die Expansionen $E(T_1 + T_2)$ und $E(\alpha T)$ für stetige lineare Operatoren $T_1, T_2, T$ zu untersuchen.

Im ersten Fall ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} E(T_1 + T_2) & = & \sup(\frac{\|(T_1+T_2)(x)-(T_1+T_2)(x')\|_Y}{\|x-x'\|_X} : x, x' \in X, x \neq x') \\ & = & \sup(\frac{\|T_1(x)-T_1(x')+T_2(x)-T_2(x')\|_Y}{\|x-x'\|_X} : x, x' \in X, x \neq x') \\ & \leq & \sup(\frac{\|T_1(x)-T_1(x')\|+\|T_2(x)-T_2(x')\|_Y}{\|x-x'\|_X} : x, x' \in X, x \neq x') \\ & \leq & E(T_1) + E(T_2). \end{array}$$

Im zweiten Fall gilt

$$\begin{array}{rcl} E(\alpha T) & = & \sup(\frac{\|\alpha T(x)-\alpha T(x')\|_Y}{\|x-x'\|_X} : x, x' \in X, x \neq x'\} \\ & = & \sup(|\alpha|\frac{\|T(x)-T(x')\|_Y}{\|x-x'\|_X} : x, x' \in X, x \neq x'\} \\ & = & |\alpha|\sup(\frac{\|T(x)-T(x')\|_Y}{\|x-x'\|_X} : x, x' \in X, x \neq x'\} = |\alpha| E(T). \end{array}$$

In beiden Fällen wird die Linearität von $T$ *nicht* benötigt.

Die beiden gerade abgeleiteten Eigenschaften der Expansion erinnern an die Eigenschaften einer Norm. Man betrachtet daher eine lineare Abbildung $T$ mit $E(T) = 0$. Eine solche Abbildung muss konstant sein; da $T(0) = 0$ gilt, folgt also $T = 0$ und die Expansion besitzt tatsächlich alle Eigenschaften einer Norm:

Satz 70: *Der Vektorrraum* $\mathrm{L}(X,Y) := \mathrm{Hom}\,(X,Y) \cap C(X,Y)$ *der stetigen linearen Abbildungen* $T : X \to Y$ *bildet zusammen mit der Expansionsabbildung*

$$E : \mathrm{L}(X,Y) \to \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad T \mapsto E(T)$$

*einen normierten Raum. Man definiert daher die Operatornorm einer linearen Abbildung* $T$ *durch* $\|T\| := E(T)$.

*Es gilt:*

$$\|T\| = \sup(\|T(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\}.$$

Beweis: Es ist nur noch die angegebene Formel für $\|T\|$ zu überprüfen:

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup(\tfrac{\|T(x)-T(x')\|_Y}{\|x-x'\|_X} : x, x' \in X, x \neq x') \\
&= \sup(\tfrac{\|T(x-x')\|_Y}{\|x-x'\|_X} : x, x' \in X, x \neq x') \\
&= \sup(\|T(\tfrac{x-x'}{\|x-x'\|_X})\|_Y : x, x' \in X, x \neq x') \\
&= \sup(\|T(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung wegen

$$\|\frac{x-x'}{\|x-x'\|_X}\|_X = 1$$

gilt. □

Bemerkung: Die Operatornorm tritt sehr häufig in Form der folgenden Ungleichung auf, die sich unmittelabr aus ihrer Definition ergibt:

$$\forall x \in X \quad \|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X. \tag{32}$$

Wir haben nun wiederum einen neuen Abbildungsraum eingeführt, und wie stets stellt sich die Frage nach seiner Vollständigkeit.

Satz 71: *Ist* $Y$ *ein Banachraum, so gilt dies auch für* $L(X,Y)$. *Insbesondere ist* $L(X,\mathbb{K})$ *stets ein Banachraum.*

Anmerkung: Der Raum $L(X,\mathbb{K})$ wird *(stetiger) Dualraum von* $X$ genannt; seine Elemente heißen *(stetige) Funktionale.*

Beweis: Es sei $(T_k)$ eine Cauchyfolge in $L(X,Y)$; es gilt also:

$$\forall \epsilon > 0\; \exists n \in \mathbb{N}\; \forall k, \ell > n \quad \|T_k - T_\ell\| < \epsilon.$$

Für jedes $x \in X$ gilt daher bei gegebenem $\epsilon > 0$ für das zugehörige $n$:

$$\forall k, \ell > n \quad \|T_k(x) - T_\ell(x)\|_Y < \epsilon \|x\|_X.$$

Folglich ist $(T_k(x))$ eine Cauchyfolge in $Y$ und damit nach Voraussetzung über $Y$ konvergent. Man kann daher eine Abbildung $T : X \to Y$ durch die Gleichung

$$T(x) := \lim_{k\to\infty} T_k(x)$$

definieren. Wegen der Linearität der $T_k$ und der Linearität des Grenzwertoperators (Satz 54) ist auch $T$ eine lineare Abbildung.

Die Cauchyfolge $(T_k)$ ist beschränkt: $\|T_k\| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Stetigkeit der Normfunktion $\|\cdot\|_Y$ liefert

$$\|T(x)\|_Y = \lim_{k\to\infty} \|T_k(x)\|_Y$$

Aus der Ungleichung $\|T_k(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ ergibt sich also

$$\forall x \in X \ \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X,$$

das heißt die Stetigkeit von $T$ nach Satz 69. □

## Vergleich verschiedener Konvergenzbegriffe

In dem normierten Raum $\mathrm{L}(X, Y)$ kann man wie im Beweis von Satz 71 gesehen für eine Folge $(T_k)$ von Operatoren die punktweise Konvergenz gegen einen Operator $T$ betrachten, sowie die Konvergenz bezüglich der Operatornorm. Letztere bekommt wegen ihrer Bedeutung den eigenen Namen *Normkonvergenz*. Wir haben gesehen, dass die Normkonvergenz der Folge $(T_k)$ ihre punktweise Konvergenz nach sich zieht, und zwar gegen denselben Grenzwert.

Es stellt sich die natürliche Frage wie Normkonvergenz mit gleichmäßiger Konvergenz zusammenhängt. Letztere bedeutet:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ \forall k > n \ \|T_k(x) - T(x)\| < \epsilon.$$

Die Linearität von $T_k$ und $T$ liefert nun allerdings für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in X$

$$\|T_k(\alpha x) - T(\alpha x)\| = |\alpha| \|T_k(x) - T(x)\|,$$

das heißt die Folge $(T_k)$ kann *niemals* gleichmäßig gegen $T$ konvergieren.

Sei andererseits $X' \subset X$ eine beschränkte Teilmenge von $X$, etwa $X' \subseteq B(0, C)$. Sei $(T_k)$ normkonvergent gegen $T$. Dann gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T_k - T\| < \epsilon$ für $k > n$. Für jedes $x \in X'$ folgt daher

$$\|T_k(x) - T(x)\| = \|(T_k - T)(x)\| \leq C\|T_k - T\| < C\epsilon,$$

das heißt $(T_k)$ konvergiert gleichmäßig gegen $T$ auf der Menge $X'$.

Es gelte nun, dass die Folge $(T_k)$ in $\mathrm{L}(X, Y)$ auf einer abgeschlossenen Kugel $B[0, r] \subset X$ gleichmäßig gegen $T$ konvergiert. Für $\epsilon > 0$ gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in B[0, r]\ \forall k > n\ \|T_k(x) - T(x)\| < \epsilon.$$

Für $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ folgt also

$$\|T_k(\frac{x}{r}) - T(\frac{x}{r})\| < \epsilon,$$

daher

$$\|T_k(x) - T(x)\| < r\epsilon,$$

und folglich $\|T_k - T\| \leq r\epsilon$, das heißt $(T_k)$ ist normkonvergent gegen $T$.

Wir fassen zusammen:

Feststellung 72: *Eine gegen $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ normkonvergente Folge $(T_k)$ in $\mathrm{L}(X, Y)$ konvergiert auch punktweise gegen $T$. Weiter sind äquivalent:*

1. *Die Folge $(T_k)$ ist normkonvergent gegen $T$.*
2. *Die Folge $(T_k)$ konvergiert auf jeder beschränkten Menge $X' \subset X$ gleichmäßig gegen $T$.*
3. *Die Folge $(T_k)$ konvergiert auf der Einheitssphäre*

$$S_X := \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$$

*gleichmäßig gegen $T$.*

Ist $T : X \to Y$ eine bijektive lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen, so ist die eindeutig bestimmte Umkehrabbildung $T^{-1} : Y \to X$ ebenfalls linear: Zu $y_1, y_2 \in Y$ gibt es nach Vorausetzung eindeutig bestimmte $x_1, x_2 \in X$ mit der Eigenschaft $T(x_1) = y_1$ und $T(x_2) = y_2$. Folglich gilt $T^{-1}(y_1+y_2) = x_1 + x_2$, da $T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$ ist. Analog argumentiert man für die skalare Multiplikation.

Ist $T$ zusätzlich stetig, so muss dies überraschenderweise für $T^{-1}$ aber nicht notwendig gelten, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 27: Es sei $\mathbb{R}[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome in einer Variablen mit reellen Koeffizienten. Dieser trägt die Normfunktion

$$\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| := \max(|a_k| : k = 0, \ldots, n).$$

Die Abbildung

$$T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$$

ist linear und injektiv. Das Bild von $T$ ist die Menge $X\mathbb{R}[X]$ der Polynome ohne konstanten Koeffizienten. Es gilt

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup(\max(\tfrac{|a_k|}{k+1} : k = 0, \ldots, n) : \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k,\ \max(|a_k| : k) = 1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

womit $T$ stetig ist. Für die Umkehrabbildung

$$T^{-1} : X\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

gilt $\|X^k\| = 1$ aber $\|T^{-1}(X^k)\| = k$, folglich ist $T^{-1}$ unstetig.

Wir versuchen die Frage zu beantworten, wodurch die Unstetigkeit der Umkehrabbildung $T^{-1}$ »verursacht« wird: $T^{-1}$ ist genau dann unstetig, wenn es unstetig im Punkt $0 \in Y$ ist. Das heißt genau dann, wenn es eine gegen 0 konvergente Folge $(y_k)$ gibt, für die $(T^{-1}(y_k))$ nicht gegen 0 konvergiert. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge $(y_{k_i})$ derart, dass $\|T^{-1}(y_{k_i})\|_Y > \epsilon$ für alle $i$. Nun sei

$$x_i := \frac{T^{-1}(y_{k_i})}{\|T^{-1}(y_{k_i})\|_Y},$$

dann gilt $\|x_i\|_X = 1$ für alle $i$. Weiter ist

$$T(x_i) = \frac{1}{\|T^{-1}(y_{k_i})\|_Y} y_{k_i};$$

da $\frac{1}{\|T^{-1}(y_{k_i})\|_Y} \leq \epsilon$ für alle $i$, ist die Folge $(T(x_i))$ eine Nullfolge. Aus dieser Überlegung gewinnt man das folgende Unstetigkeitskriterium für $T^{-1}$:

Feststellung 73: *Die Umkehrabbildung einer stetigen linearen Abbildung $T : X \to Y$ ist genau dann unstetig, wenn es eine Folge $(x_k)$ auf der Einheitssphäre $S_X$ gibt, für die Bildfolge $(T(x_k))$ gegen 0 konvergiert.*

## Stetige Endomorphismen

Der normierte Raum $\mathrm{L}(X, X)$ der stetigen, linearen Selbstabbildungen – lineare Selbstabbildungen werden auch *Endomorphismen* genannt – eines normierten Raums $X$ trägt neben der Addition eine weitere innere Verknüpfung, nämlich die Verkettung von Abbildungen. Wir wollen das Zusammenspiel von Verkettung, punktweiser Addition und skalarer Multiplikation und der Operatornorm nun beleuchten.

Es seien $X$, $Y$ und $Z$ drei Mengen. Dann kann man die Verkettungsabbildung

$$\circ : \ \mathrm{Abb}\,(Y, Z) \times \mathrm{Abb}\,(X, Y) \to \mathrm{Abb}\,(X, Z), \ (T, S) \mapsto T \circ S \tag{33}$$

betrachten. Sind $Y$ und $Z$ sogar $\mathbb{K}$-Vektorräume, so auch $\mathrm{Abb}\,(X, Y)$, $\mathrm{Abb}\,(Y, Z)$ und $\mathrm{Abb}\,(X, Z)$ mit den entsprechenden punktweisen Operationen. Man überprüft leicht, dass die Abbildung $\circ$ dann die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} (\alpha T) \circ S &= \alpha(T \circ S) \\ (T_1 + T_2) \circ S &= T_1 \circ S + T_2 \circ S. \end{aligned} \tag{34}$$

$\circ$ ist also im ersten Argument eine lineare Abbildung.

Die Verkettung linearer Abbildungen ist linear. Ist zusätzlich auch $X$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so hat man folglich eine Abbildung

$$\circ: \ \mathrm{Hom}\,(Y,Z) \times \mathrm{Hom}\,(X,Y) \to \mathrm{Hom}\,(X,Z), \ (T,S) \mapsto T \circ S. \tag{35}$$

Diese ist auch im zweiten Argument linear:

$$\begin{aligned} T \circ (\alpha S) &= \alpha(T \circ S) \\ T \circ (S_1 + S_2) &= T \circ S_1 + T \circ S_2 \end{aligned} \tag{36}$$

Im Fall $X = Y = Z$ liefern (34) und (36) eine innere Verknüpfung auf $\mathrm{Hom}\,(X,X)$, welche die Identität $\mathrm{id}_X$ als neutrales Element besitzt und mit der Addition durch die Distributivgesetze verbunden ist:

FESTSTELLUNG 74: *Das Tripel* $(\mathrm{Hom}\,(X,X),+,\circ)$ *ist ein im Allgemeinen nicht kommutativer Ring mit der Eigenschaft*

$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\, T,S \in \mathrm{Hom}\,(X,X) \quad (\alpha T) \circ S = \alpha(T \circ S) = T \circ (\alpha S);$$

*eine solche Struktur nennt man* $\mathbb{K}$*-Algebra.*

Die Verkettung stetiger Abbildungen ist stetig. Sind also $X$, $Y$ und $Z$ normierte Räume, so liefert die Verkettung eine Abbildung

$$\circ: \ \mathrm{L}(Y,Z) \times \mathrm{L}(X,Y) \to \mathrm{L}(X,Z), \ (T,S) \mapsto T \circ S, \tag{37}$$

die ebenfalls in jedem Argument linear ist. Wiederum liefert dies im Fall $X = Y = Z$ ein Ringstruktur auf $\mathrm{L}(X,X)$.

Sind $S : X \to Y$, $T : Y \to Z$ stetige lineare Abbildungen, so erhält man durch zweimalige Anwendung der Ungleichung (32):

$$\|(T \circ S)(x)\|_Z = \|T(S(x))\|_Z \leq \|T\|\,\|S(x)\|_Y \leq \|T\|\,\|S\|\,\|x\|_X$$

und daher $\|T \circ S\| \leq \|T\|\,\|S\|$.

Wir fassen das Ergebnis der Diskussion zusammen:

SATZ 75: *Es seien* $X$, $Y$ *und* $Z$ *normierte Räume, dann gilt für alle* $S \in \mathrm{L}(X,Y)$ *und* $T \in \mathrm{L}(Y,Z)$ *die Ungleichung* $\|T \circ S\| \leq \|T\|\,\|S\|$.

*Die Verkettung*

$$\circ : \mathrm{L}(Y,Z) \times \mathrm{L}(X,Y) \to \mathrm{L}(X,Z), \ (T,S) \mapsto T \circ S$$

*ist eine stetige Abbildung, die im Fall* $X = Y = Z$ *den Ring* $(L(X,X),+,\circ)$ *zu einer* $\mathbb{K}$*-Algebra mit stetigen Rechenoperationen macht.*

Beweis: Es ist nur noch die Stetigkeit der Verkettung zu beweisen. Wir wenden das $\epsilon$-$\delta$-Kriterium für einen Punkt $(T_0, S_0)$ an. Gilt für $(T, S)$ die Ungleichung

$$d((T,S),(T_0,S_0)) = \|T - T_0\| + \|S - S_0\| < \delta,$$

so folgt

$$\begin{aligned} \|T \circ S - T_0 \circ S_0\| &= \|T \circ S - T \circ S_0 + T \circ S_0 - T_0 \circ S_0\| \\ &\leq \|T \circ S - T \circ S_0\| + \|T \circ S_0 - T_0 \circ S_0\| \\ &= \|T \circ (S - \circ S_0)\| + \|(T - T_0) \circ S_0\| \\ &= \|T\|\|S - S_0\| + \|T - T_0\|\|S_0\| \\ &= (\|T_0\| + \delta)\delta + \delta\|S_0\|, \end{aligned}$$

woraus die Stetigkeit folgt. □

In der obigen Feststellung gilt im allgemeinen nicht die Gleichheit: Man betrachte etwa den normierten Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$. Da dieser Raum das Produkt von $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik mit sich selbst ist, sind die Projektionsabbildungen $p_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach Satz 35 stetig. Nach Satz 36 ist auch die Abbildung $e_{0,1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$ stetig. Sowohl $e_{0,1}$ als auch die $p_i$ sind offensichtlich linear. Es gilt $e_{0,1} \circ p_2 = 0$, und daher

$$0 = \|e_{0,1} \circ p_2\| < \|e_{0,1}\| \, \|p_2\| \neq 0.$$

Anmerkungen:

1. Die im Satz 75 beschriebene Situation kann man systematischer untersuchen. Dies führt zu dem funktionalanalytischen Teilgebiet der *normierten Algebren*, das hier nicht behandelt werden kann.

2. Im Fall $X = \mathbb{K}^n$ ist der Ring $(L(X,X), +, \circ)$ im Wesentlichen der altbekannte Ring der quadratischen Matrizen $\mathbb{K}^{n \times n}$.