

2.2 Topologie

Die Stetigkeit der Rechenoperationen in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ bewirkt, dass X in der Umgebung jedes seiner Punkte $x \in X$ »gleich aussieht«, im Gegensatz zur Situation in metrischen Räumen. Diese vage Aussage soll im folgenden Abschnitt präzisiert werden.

Jeder Vektor y in dem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ liefert nach Satz 54 und Satz 36 eine stetige Abbildung

$$t_y : X \rightarrow X, x \mapsto x + y,$$

die *Translation* oder *Verschiebung um y* . Diese Abbildung ist bijektiv und besitzt t_{-y} als Umkehrfunktion.

Es sei $B(x_0, r)$ eine offene Kugel in X , dann gilt:

$$B(x_0, r) = \{x_0 + x : x \in B(0, r)\} = t_{x_0}(B(0, r)).$$

Da die offenen Teilmengen von X genau die Vereinigungen offener Kugeln sind, ergibt sich hieraus: Jede offene Menge $U \subseteq X$ mit $x_0 \in U$ hat die Form $U = x_0 + V$, wobei V eine offene Menge von X ist, die den Nullvektor enthält. Man kann diesen Sachverhalt geometrisch so formulieren: *Ein normierter Raum sieht in der Nähe jedes Punktes gleich aus.*

Jeder Skalar $\alpha \in \mathbb{K}$ liefert nach Satz 54 eine stetige Abbildung

$$s_\alpha : X \rightarrow X, x \mapsto \alpha x.$$

Ist $\alpha \neq 0$, so ist diese Abbildung offensichtlich bijektiv und besitzt $s_{\alpha^{-1}}$ als Umkehrfunktion.

Für die offene Kugel $B(0, r)$ gilt:

$$B(0, r) = \{rx : x \in B(0, 1)\} = s_r(B(0, 1)).$$

Insgesamt kann man also feststellen: Jede offene Kugel in einem normierten Raum lässt sich bijektiv und stetig auf die offene Kugel $B(0, 1)$ abbilden; letztere nennt man die *offene Einheitskugel von X* .

Eine entsprechende Aussage kann man auch für die abgeschlossenen Kugeln und die *abgeschlossene Einheitskugel* $B[0, 1]$ machen.

Da die offenen Kugeln die Topologie von X vollständig festlegen, zeigen die obigen Ausführungen, dass Aussagen über die Einheitskugel eines normierten Raums große Bedeutung haben können.

NORMIERTE UNTERRÄUME UND APPROXIMATION

In der angewandten Mathematik spielen Approximationsprobleme eine wichtige Rolle. Diese lassen sich häufig in folgender Weise formulieren: Gegeben ist ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ und ein Untervektorraum $Y \subset X$. Gibt es dann zu jedem $x_0 \in X$ ein $y_0 \in Y$, welches x_0 bestmöglich approximiert:

$$\|x_0 - y_0\| = \min(\|x_0 - y\| : y \in Y). \quad (31)$$

Weiter stellen sich die Fragen: Wie sieht die Menge aller Bestapproximationen (31) aus? Unter welchen Voraussetzungen gibt es genau eine Bestapproximation?

Ein Beispiel für ein solches Problem ist die Approximation von stetigen Funktionen durch Polynome: Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass die stetigen Funktionen $C([a, b], \mathbb{R})$ zusammen mit der im Beispiel 26 eingeführten Supremumsnorm ein normierter Raum ist. Die Menge $P(n, \mathbb{R})$ der Polynomfunktionen vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit reellen Koeffizienten bildet einen Untervektorraum von $C([a, b], \mathbb{R})$. Das Bestapproximationsproblem (31) stellt also die Frage, ob jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ im Sinn der Supremumsnorm bestmöglich durch ein Polynom n -ten Grades approximiert werden kann, eine Frage von offensichtlicher praktischer Bedeutung.

Im Folgenden werden einige Aussagen über die Topologie von Unterräumen bewiesen, die im Zusammenhang mit dem obigen Approximationsproblem von Bedeutung sind.

FESTSTELLUNG 58: *Ein echter Untervektorraum $Y \subset X$ eines normierten Raums $(X, \|\cdot\|)$ ist nicht offen. Ein Untervektorraum $Y \neq 0$ ist nicht beschränkt.*

BEWEIS: Nach Voraussetzung gibt es $x_0 \in X \setminus Y$. Sei nun $y_0 \in Y$ und $r > 0$. Dann gilt

$$x_1 := y_0 + \frac{r}{2\|x_0 - y_0\|}(x_0 - y_0) \in B(y_0, r),$$

denn

$$\|y_0 + \frac{r}{2\|x_0 - y_0\|}(x_0 - y_0) - y_0\| = \frac{r}{2\|x_0 - y_0\|}\|x_0 - y_0\| = \frac{r}{2}.$$

Wäre $x_1 \in Y$, so wäre auch $x_1 - y_0 = \frac{r}{2\|x_0 - y_0\|}(x_0 - y_0) \in Y$ und damit $x_0 \in Y$. Dies zeigt: Jede offene Kugel um jeden Punkt $y \in Y$ enthält einen Punkt $x \notin Y$, womit Y nicht offen ist.

Ist $y \in Y \setminus 0$, so gilt $\lambda y \in Y$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$. Da $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$ beliebig große Werte annimmt, ist Y nicht beschränkt. \square

Die letzte Feststellung beinhaltet eine negative und eine positive Nachricht in Bezug auf das Approximationsproblem (31): Für einen offenen Unterraum Y ließe sich das Approximationsproblem *nicht* lösen. Nach der Feststellung gibt es also immerhin eine Chance der Lösung. Andererseits kann man zur Lösung nicht direkt mit Kompaktheit argumentieren, da nach derselben Feststellung $Y \neq 0$ niemals beschränkt ist. Die Frage drängt sich auf, ob Untervektorräume wenigstens abgeschlossen sind. Die Antwort ist im Allgemeinen negativ:

FESTSTELLUNG 59: *Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ kann nicht abgeschlossene Untervektorräume enthalten.*

BEWEIS: Wie im Beispiel 26 gezeigt, ist die Menge $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der beschränkten Folgen reeller Zahlen zusammen mit der Supremumsnorm ein normierter Raum. Es sei Y die Menge aller reeller Zahlfolgen (x_k) mit der Eigenschaft

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall k > n \ x_k = 0.$$

Diese Folgen sind offensichtlich beschränkt und bilden mit der gliedweisen Addition und skalaren Multiplikation einen Untervektorraum von $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Die Folge (y_k) in Y sei durch

$$y_k := \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots\right)$$

definiert. Sie konvergiert gegen die Folge

$$y := \left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}},$$

denn es gilt

$$\|y_k - y\|_\infty = \left\| \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots\right) \right\|_\infty = \frac{1}{k+1}.$$

Da $y \notin Y$ ist nach Satz 19 der Unterraum Y nicht abgeschlossen. \square

Wenigstens kann man sich zu einem gegebenen Untervektorraum einen abgeschlossenen Untervektorraum verschaffen, der den ersteren enthält:

SATZ 60: *Der Abschluss eines Untervektorraums eines normierten Raums ist selbst ein Untervektorraum.*

BEWEIS: Es sei Y ein Untervektorraum des normierten Raums X . Man wendet den Satz 19 an: Sind $x, x' \in \bar{Y}$, so gibt es konvergente Folgen (y_k) und (y'_k) in Y , die gegen x und x' konvergieren. Nach Satz 54 konvergieren dann die Folgen $(y_k + y'_k)$ und (αy_k) , $\alpha \in \mathbb{K}$, gegen $x + x'$ und αx . Da Y ein Untervektorraum ist, liegen die Folgen $(y_k + y'_k)$ und (αy_k) , $\alpha \in \mathbb{K}$, in Y . Also gilt nach Satz 19 $x + x', \alpha x \in \bar{Y}$. \square

Zur Illustration wird der Abschluss des im Beweis von Feststellung 59 verwendeten Untervektorraums Y bestimmt: Es sei $y \in \bar{Y}$ und (y_k) eine gegen y konvergente Folge in Y . Die Elemente y und y_k sind selbst Folgen: $y = (a_\ell)$ und $y_k = (a_{k,\ell})$. Das Konvergenzkriterium besagt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall k > n \quad \|y_k - y\|_\infty < \epsilon.$$

Nach Definition der Supremumsnorm folgt hieraus:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall k > n \forall \ell \in \mathbb{N} \quad |a_{k,\ell} - a_\ell| < \epsilon.$$

Da die Folgen y_k insbesondere die Folge y_{n+1} nach endlich vielen Gliedern konstant 0 werden, folgt aus der letzten Bedingung:

$$\forall \epsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall \ell > m \quad |a_\ell| < \epsilon,$$

das heißt y ist eine Nullfolge.

Ist andererseits $y = (a_\ell) \in B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ eine Nullfolge, so definiere man die Folgen $y_k \in Y$ durch

$$y_k := (a_1, a_2, \dots, a_k, 0, 0, \dots).$$

Dann konvergiert die Folge (y_k) gegen y : Ist nämlich $\epsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_\ell| < \epsilon$ für alle $\ell > n$. Damit folgt

$$\|y_k - y\| = \|(0, 0, \dots, -a_{k+1}, -a_{k+2}, \dots)\| \leq \epsilon,$$

sofern $k > n$.

Es wurde gezeigt: \bar{Y} ist die Menge $kF_0(\mathbb{R})$ der reellen Nullfolgen. Außerdem bekommt man als Zugabe: Die Menge $kF_0(\mathbb{R})$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum des normierten Raums $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und damit selbst ein Banachraum.

Satz 60 liefert auch eine konkrete Möglichkeit gewisse normierte Räume zu vervollständigen:

KOROLLAR 61: Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und Y ein normierter Unterraum von X , so ist der Abschluss \bar{Y} die Vervollständigung von Y .

Nach Satz 15 ist \bar{Y} vollständig also nach Satz 60 ein Banachraum. Die Behauptung, dass \bar{Y} die Vervollständigung von Y ist, soll hier nicht weiter diskutiert werden, ist aber vor dem Hintergrund von Satz 19 naheliegend.

2.3 Normierte Räume von Abbildungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse des Abschnitts 1.7 verallgemeinert: Wie dort eingeführt sei die Menge aller Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ zwischen den Mengen X und Y mit $\text{Abb}(X, Y)$ bezeichnet. Sie trägt keine weitere Struktur. Setzt man voraus, dass (Y, d) ein metrischer Raum ist, so kann man die Teilmenge $B(X, Y) \subseteq \text{Abb}(X, Y)$ der beschränkten Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ definieren. Mit der Supremumsmetrik d_∞ wird diese zu einem metrischen Raum, der mitsamt einiger Unterräume im Abschnitt 1.7 diskutiert wird. Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich die Sachlage verhält, wenn $(Y, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist.

Es sei X eine Menge und Y zunächst ein \mathbb{K} -Vektorraum. Dann können Abbildungen $f, g \in \text{Abb}(X, Y)$ *punktweise addiert* werden:

$$f + g : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x) + g(x).$$

Weiter kann man punktweise mit Skalaren multiplizieren: für $\alpha \in \mathbb{K}$ ist

$$\alpha \cdot f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto \alpha \cdot f(x).$$

Es ist eine längliche Routinerechnung nachzuprüfen, dass diese punktweisen Verknüpfungen die Menge $\text{Abb}(X, Y)$ zu einem \mathbb{K} -Vektorraum machen. So ist etwa die Nullabbildung

$$X \rightarrow Y, \quad x \mapsto 0,$$

die jedes $x \in X$ auf den Nullvektor von Y abbildet, der Nullvektor von $\text{Abb}(X, Y)$. Zu jedem $f \in \text{Abb}(X, Y)$ ist die Abbildung

$$X \rightarrow Y, \quad x \mapsto -f(x)$$

das zu f inverse Element in $\text{Abb}(X, Y)$.

Aus der Analysis und der linearen Algebra sind folgende Spezialfälle bekannt:

- Abb (X, \mathbb{K}) : die reell- oder komplexwertigen Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich X (z.B. $X = [a, b]$). Diese werden oft auch mit $\text{Fun}(X, \mathbb{K})$ bezeichnet.
- Abb (X, \mathbb{K}^n) , $n \geq 2$: die vektorwertigen Abbildungen mit gemeinsamem Definitionsbereich X . Je nach der Art der Menge X und dem Wert von n kann man hier verschiedene Abbildungsklassen unterscheiden:
 - $X \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Solche Abbildungen kann man unter geeigneten zusätzlichen Voraussetzungen wie z.B. der Stetigkeit als Parameterdarstellungen von Kurven im \mathbb{R}^n betrachten.
 - $X = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$, I, J reelle Intervalle, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \geq 3$: ähnlich wie oben kann man diese Abbildungen als Parameterdarstellungen von Flächen im \mathbb{R}^n betrachten.
 - $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \in \{2, 3\}$: Auf der Menge X definierte, ebene oder räumliche Vektorfelder, wie sie als Geschwindigkeitsfelder in der Strömungsdynamik oder als Kraftfelder in der Mechanik oder Elektrodynamik auftreten.
- Abb $(\{1, 2, \dots, n\}, \mathbb{K})$: ist der affine Raum \mathbb{K}^n .
- Abb (\mathbb{N}, \mathbb{K}) : ist die Menge der Folgen mit Werten in \mathbb{K} .

Ab jetzt sei zusätzlich auf Y eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben. Man betrachtet dann zunächst den metrischen Raum $B(X, Y)$ der beschränkten Abbildungen $f : X \rightarrow Y$. Die Beschränktheit einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ lässt sich mit Hilfe der Norm so ausdrücken:

$$\exists C > 0 \forall x \in X \|f(x)\| \leq C,$$

das heißt das Bild $f(X)$ ist in einer Kugel $B[0, C]$ enthalten.

Die Menge $B(X, Y)$ ist eine Teilmenge des \mathbb{K} -Vektorraums $\text{Abb}(X, Y)$. Wie erwartet gilt mehr:

SATZ 62: *Die Menge $B(X, Y)$ der beschränkten Abbildungen einer Menge X in einen normierten Raum $(Y, \|\cdot\|)$ ist zusammen mit der Abbildung*

$$\|\cdot\|_\infty : B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad f \mapsto \sup(\|f(x)\| : x \in X)$$

ein normierter Raum.

$(B(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum genau dann, wenn dies für $(Y, \|\cdot\|)$ gilt. Insbesondere ist $B(X, \mathbb{K})$ ein Banachraum.

BEWEIS: Man zeigt zunächst, dass $B(X, Y)$ ein Untervektorraum von $\text{Abb}(X, Y)$ ist. Sind f und g beschränkte Funktionen, so gilt

$$\forall x \in X \quad \|(f + g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|,$$

also ist $f + g$ eine durch $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ beschränkte Funktion und es gilt

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ist f eine beschränkte Funktion und $\alpha \in \mathbb{K}$, so gilt

$$\forall x \in X \quad \|(\alpha f)(x)\| = |\alpha| \|f(x)\|,$$

also ist αf eine durch $|\alpha| \|f\|_\infty$ beschränkte Funktion und es gilt

$$\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty.$$

Folglich ist $B(X, Y)$ tatsächlich ein Untervektorraum von $\text{Abb}(X, Y)$ und die Abbildung $\|\cdot\|$ besitzt die Homogenitätseigenschaft und erfüllt die Dreiecksungleichung. Offensichtlich gilt auch

$$\|f\|_\infty = d_\infty(f, 0),$$

wobei 0 die Nullabbildung ist. Die Reflexivität von d_∞ liefert dann die Eigenschaft 1 einer Norm.

Die Aussage über die Vollständigkeit wird von Satz 49 geliefert. \square

BEMERKUNG: Die Norm $\|\cdot\|_\infty$ nennt man die *Supremumsnorm*.

Wir wenden uns nun den stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ zu. Um von Stetigkeit sprechen zu können muss zusätzlich vorausgesetzt werden, dass die Menge X mit einer Metrik d versehen ist. Die aus der Analysis bekannte Tatsache, dass die punktweise Summe stetiger Funktionen und die punktweise skalare Multiplikation einer stetigen Funktion wieder stetig sind, lässt sich dank der Stetigkeit der Rechenoperationen in einem normierten Raum verallgemeinern:

SATZ 63: Die Menge $C(X, Y)$ der stetigen Abbildungen eines metrischen Raums (X, d) in einen normierten Raum $(Y, \|\cdot\|)$ ist ein Untervektorraum von $\text{Abb}(X, Y)$.

BEWEIS: Es seien $f, g \in C(X, Y)$. Die punktweise Summe $f + g$ lässt sich wie folgt als Verkettung von Abbildungen schreiben:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X & \xrightarrow{f \times g} & Y \times Y & \xrightarrow{+} & Y \\ x & \mapsto & (x, x) & \mapsto & (f(x), g(x)) & \mapsto & f(x) + g(x). \end{array}$$

Für die »Diagonalabbildung« Δ gilt

$$d_{X \times X}((x, x), (y, y)) = 2d(x, y),$$

sie ist also dehnungsbeschränkt und damit stetig. Die Abbildung $f \times g$ ist nach Satz 37 stetig. Schließlich ist die Addition nach Satz 54 stetig. Folglich ist die Verkettung $f + g$ nach Satz 27 stetig.

Sei nun $\alpha \in \mathbb{K}$, dann lässt sich αf wie folgt als Verkettung darstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{e} & \mathbb{K} \times X & \xrightarrow{\ell_\alpha \times f} & \mathbb{K} \times Y & \xrightarrow{s} & Y \\ x & \mapsto & (1, x) & \mapsto & (\alpha, f(x)) & \mapsto & \alpha f(x), \end{array}$$

wobei die Multiplikationsabbildung ℓ_α stetig ist. Die Abbildung e ist nach Satz 36 stetig, die Abbildung $\ell_\alpha \times f$ nach Satz 37 und die Abbildung s nach Satz 54. Folglich ist die Verkettung αf nach Satz 27 stetig. \square

SATZ 64: Die Menge $\text{BC}(X, Y)$ der beschränkten, stetigen Abbildungen eines metrischen Raums (X, d) in einen normierten Raum $(Y, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Unterraum von $(\text{B}(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$.

$(\text{BC}(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn dies für $(Y, \|\cdot\|)$ gilt. Insbesondere ist $C(X, \mathbb{K})$ für einen kompakten metrischen Raum (X, d) ein Banachraum.

BEWEIS: Es gilt $\text{BC}(X, Y) = \text{B}(X, Y) \cap C(X, Y)$, wobei nach den Sätzen 62 und 63 die beiden Mengen auf der rechten Seite Untervektorräume von $\text{Abb}(X, Y)$ sind. Damit ist $\text{BC}(X, Y)$ selbst ein Untervektorraum von $\text{B}(X, Y)$ und trägt die Supremumsnorm. Die Vollständigkeitsbehauptung folgt aus Satz 51. Ist X kompakt, so gilt nach Satz 42 $\text{BC}(X, \mathbb{K}) = C(X, \mathbb{K})$; außerdem ist \mathbb{K} vollständig. \square

BEMERKUNG: Für jedes $f \in C(X, Y)$ ist wegen der Stetigkeit der Normfunktion auf Y auch die Funktion

$$\|f\| : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|f(x)\|$$

stetig. Im Fall eines kompakten metrischen Raums X nimmt nach Korollar 43 $\|f\|$ also das Supremum $\|f\|_\infty$ an. Man bezeichnet die Norm auf $C(X, Y)$ in diesem Fall der größeren Klarheit wegen mit $\|\cdot\|_{\max}$ und nennt sie auch die *Maximumsnorm*.

In der Analysis lernt man weitere Eigenschaften von Abbildungen kennen, die zu interessanten normierten Räumen führen: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt bekanntlich n -mal stetig differenzierbar, falls alle Ableitungen

$$f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ existieren, und sich die n -te Ableitung $f^{(n)}$ stetig in die Punkte a und b fortsetzen lässt. Nach den Ableitungsregeln sind die Summe $f+g$ zweier n -mal stetig differenzierbarer Funktionen, sowie Vielfache λf , $\lambda \in \mathbb{R}$, in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ n -mal stetig differenzierbar. Weiter sind die Summe $f^{(n)} + g^{(n)}$ und $\lambda f^{(n)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, in jedem Punkt $x_0 \in [a, b]$ stetig.

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt unendlich oft stetig differenzierbar, falls alle Ableitungen $f^{(k)}$ in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ existieren, stetig sind, und sich stetig in die Punkte a und b fortsetzen lassen. Wie oben zeigt man, dass Summen und Vielfache von unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen ebensolche sind.

Da eine differenzierbare Funktion stetig ist, gilt:

FESTSTELLUNG 65: Die Menge $C^n([a, b], \mathbb{R})$ der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und die Menge $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind normierte Unterräume von $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

BEMERKUNG: Die obige Feststellung lässt sich auf Funktionen mehrerer Variabler und partielle, stetige Differenzierbarkeit nach einigen oder allen Variablen verallgemeinern.

Offensichtlich gilt

$$C([a, b], \mathbb{R}) \supset C^1([a, b], \mathbb{R}) \supset C^2([a, b], \mathbb{R}) \supset \dots \supset C^\infty([a, b], \mathbb{R}).$$

Interessant ist nun die folgende Beobachtung: Man betrachte die Folge (f_k) der Funktionen

$$f_k : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}.$$

In $(-1, 1)$ gilt $f'_k(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}}$ und daher

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'_k(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}}$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}},$$

das heißt die Folge (f_k) liegt in $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$. Ist f die Betragsfunktion von \mathbb{R} , so gilt

$$|f_k(x) - f(x)| \leq |\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} - |x|| = ||x| + \sqrt{\frac{1}{k}} - |x|| = \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

Es folgt $\|f_k - f\|_\infty \leq \sqrt{\frac{1}{k}}$, womit im Sinne der Supremumsnorm $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ gilt. Aber $f \notin C^1([-1, 1], \mathbb{R})$, da an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

Analoge Beispiele kann man für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden. Daher:

FESTSTELLUNG 66: *Die normierten Räume $(C^n([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ sind für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ nicht vollständig und daher auch nicht abgeschlossen in $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.*