2 Normierte Räume

Die Ergebnisse des Abschnitts 1.7 zeigen, dass Funktionenräumen wie der Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen $\mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$ Metriken tragen, die anwendungsrelevant sind. Zusätzlich kann man mit Funktionen auch rechnen: sie können punktweise addiert und multipliziert werden. Dieser Eigenschaft wird durch die Theorie der metrischen Räume keine Rechnung getragen, obwohl gerade die Kombination aus Metrik und Rechenoperationen mit den Punkten des metrischen Raums für viele Anwendungen von besonderer Bedeutung ist. Man denke etwa an Approximation von stetigen Funktionen durch Polynome oder an die Fourieranalyse von periodischen Funktionen. Der in diesem Abschnitt entwickelte Begriff des normierten Raums schafft hier durch Verschmelzung von Metrik mit linearer Algebra Abhilfe.

2.1 Grundbegriffe

Begriffe aus der linearen Algebra

Im Folgenden stehe das Symbol $\mathbb{K}$ stets für den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Definitionen und Ergebnisse in denen dieses Symbol auftaucht, gelten also gleichermaßen für beide Körper.

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist ein Tripel $(V,+,\cdot)$ bestehend aus einer nicht leeren Menge V, einer Abbildung

$$+ : V \times V \to V,\ (x_1,x_2) \mapsto a(x_1,x_2) =: x_1 + x_2$$

und einer Abbildung

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V\ (\alpha,x) \mapsto s(\alpha,x) =: \alpha \cdot x,$$

die folgende Eigenschaften besitzen:

A_1: $\forall x_1,x_2,x_3 \in X \quad (x_1+x_2)+x_3 = x_1+(x_2+x_3)$,

A_2: $\exists 0 \in X\ \forall x \in X \quad 0+x = x+0 = x$,

A_3: $\forall x \in X\ \exists x' \in X \quad x+x' = x'+x = 0$,

A_4: $\forall x_1,x_2 \in X \quad x_1+x_2 = x_2+x_1$,

S_1: $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, x \in X \quad (\alpha\cdot\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x)$,

S_2: $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x,$

S_3: $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x_1, x_2 \in X \quad \alpha \cdot (x_1 + x_2) = \alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2,$

S_4: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x \in X \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$

Die folgenden Punkte fassen grundlegende Eigenschaften, Sprechweisen und Konventionen in bezug auf Vektorräume zusammen:

- Die Elemente eines Vektorraums nennt man *Vektoren*. Die Elemente von $\mathbb{K}$ nennt man auch *Skalare*.

- Die Abbildung $+$ wird als Vektoraddition oder einfach *Addition* bezeichnet. Für diese wird aus Gründen der Bezeichnungseffizienz – nicht zuviele verschiedene Symbole – das gleiche Symbol $+$ verwendet wie für die Addition im Körper $\mathbb{K}$. Dies ist beim Rechnen in Vektorräumen zu beachten.

- Der in A_2 auftauchende Vektor 0 wird als *Nullvektor* bezeichnet. Er ist durch A_2 eindeutig bestimmt. Man beachte wiederum die Symbolgleichheit mit der Zahl $0 \in \mathbb{K}$.

- Der in A_3 auftauchende Vektor x' zu einem Vektor x wird *Inverses* oder *Negatives* von x genannt. Er ist durch A_3 und x eindeutig bestimmt und wird ab jetzt mit dem Symbol $-x$ bezeichnet, also ebenfalls wie das Negative einer Zahl.

- Die Abbildung $\cdot$ nennt man *skalare Multiplikation*, Elemente der Form $\alpha \cdot x$ entsprechend *skalare Vielfache von x*. Das Symbol $\cdot$ für die skalare Multiplikation ist dasselbe wie für die Multiplikation von Körperelementen. Dies ist beim Rechnen in Vektorräumen zu beachten.

- Das Multiplikationssymbol $\cdot$ wird häufig unterdrückt, das heißt es wird αx anstelle von $\alpha \cdot x$ geschrieben.

- Es gilt »Punkt vor Strich« auch im Fall der Multiplikation mit Skalaren.

Die Axiome A_1 bis A_4 kann man auch so zusammenfassen: $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Im Fall der Vektorräume $\mathbb{K}^n$ spielt der Begriff einer Basis eine ausgezeichnete Rolle. Da die in der Funktionalanalysis betrachteten Räume häufig keine endliche Basis besitzen, ist der Basisbegriff hier zwar von geringerer Bedeutung, zumindest aber der Begriff der linearen Unabhängigkeit wird benötigt:

- Eine Teilmenge $E \subseteq V$ eines Vektorraums heißt *Erzeugendensystem von* V, falls es zu jedem $x \in V$ Elemente $e_1, \ldots, e_r \in E$ gibt, für die $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r$ gilt.

- Eine Teilmenge $E \subseteq V$ eines Vektorraums heißt *linear unabhängig*, falls für endliche viele verschiedene Elemente $e_1, \ldots, e_r \in E$ aus $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r = 0$ stets $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$ folgt.

- Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem B eines Vektorraums V heißt *Basis von* X.

- Ist E eine linear unabhängige Menge eines Vektorraums, so besitzt dieser eine Basis B mit der Eigenschaft $B \supseteq E$.

- Zwei Basen besitzen dieselbe Mächtigkeit; letztere nennt man die *Dimension von* X und bezeichnet sie mit dem Symbol $\dim(X)$.

Metriken auf Vektorräumen

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, dessen Punkte auch einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $(X, +, \cdot)$ bilden. Motiviert durch die eingangs erwähnten Beispiele betrachtet man folgende Verträglichkeitseigenschaften der Metrik mit den Rechenoperationen in X:

V: Verschiebungsinvarianz: $\forall x_1, x_2, x_3 \in X \quad d(x_1, x_2) = d(x_1 + x_3, x_2 + x_3)$,

S: Skalierung: $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in X \quad d(0, \alpha x) = |\alpha| d(0, x)$.

Das Symbol $|\cdot|$ steht hier wie im Folgenden für die Betragsfunktion des Körpers $\mathbb{K}$.

Besitzt eine Metrik die Eigenschaft V, so gilt $d(x_1, x_2) = d(0, x_2 - x_1)$; zusammen mit Eigenschaft S wird man also dazu geführt, die Abbildung $X \to X,\ x \mapsto d(0, x)$ zu betrachten, da diese die Metrik d vollständig festlegt. Man nennt sie die Norm(-funktion) von X und interpretiert ihre Werte $d(0, x)$ als »Längen« der Vektoren $x \in X$. Um zu einer intuitiven Formulierung der Begriffe zu kommen, dreht man die gerade durchgeführte Argumentationskette um und beginnt mit der Definition einer Normfunktion, aus der man dann die Metrik gewinnt.

Definition 52: *Ein normierter Raum ist ein Paar* $(X, \|\cdot\|)$ *bestehend aus einem* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* X *und einer Abbildung*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x \in X \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K} \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *(positive Homogenität),*
3. $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Dreiecksungleichung).*

Die Abbildung $\|\cdot\|$ *nennt man eine Norm(-funktion) (auf* X*).*

Jeder normierte Raum ist in natürlicher Weise auch ein metrischer Raum, die Abbildung

$$d(x, y) := \|x - y\| \tag{29}$$

ist nämlich eine Metrik: Die Verwendung der Homogenitätseigenschaft 2 liefert

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\|,$$

womit d symmetrisch ist. Die Eigenschaft 1 zeigt das $\|x - y\| = 0$ äquivalent ist zu $x - y = 0$ also $x = y$. Folglich ist d reflexiv. Schließlich erhält man aus der Dreiecksungleichung 3 die Dreiecksungleichung für die Metrik d:

$$\|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

Man nennt d die *zu der Norm* $\|\cdot\|$ *gehörende Metrik*. Es besteht die Beziehung

$$\forall x \in X \quad \|x\| = d(x, 0) \tag{30}$$

und die Metrik d besitzt offensichtlich die Eigenschaften V und S. Umgekehrt lässt sich leicht einsehen, dass jede verschiebungsinvariante und skalierende Metrik d eines $\mathbb{K}$-Vektorraums über die Formel (30) zu einer Norm führt.

Beispiel 23: Das Paar $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ ist ein normierter Raum, denn $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Eigenschaften 1 bis 3 gelten bekanntermaßen für den Absolutbetrag der reellen beziehungsweise komplexen Zahlen. Die Homogenität 2 entspricht dabei der Multiplikativität

$$\forall x, y \in \mathbb{K} \quad |xy| = |x||y|$$

der Betragsfunktion. $\diamond$

Beispiel 24: Auf dem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^n$ lassen sich die sogenannten *p-Normen* definieren: Für $p \in \mathbb{N}$ sei

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p := (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Auch für den Fall $p = \infty$ hat man eine Norm:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Vergleicht man mit dem Beispiel 1 der p-Metriken d_p, so erkennt man, dass die Gleichung

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = d_p((x_1, \ldots, x_n), (0, \ldots, 0))$$

gilt. Aus dieser folgen die Eigenschaften 1 und 3 von $\|\cdot\|_p$. Die Homogenität 2 lässt sich einfach nachrechnen.

Man beachte auch, dass die Metrik d_p gerade die im Sinn von (29) zur Norm $\|\cdot\|_p$ gehörende Metrik ist. $\diamond$

Für das folgende Beispiel erinnere man sich an die Definition eines Untervektorraums: Eine Teilmenge Y eines $\mathbb{K}$-Vektorraums $(X, +, \cdot)$ heißt *Untervektorraum von X*, falls Y mit den von X übernommenen Abbildungen $+$ und $\cdot$ selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn Y die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

U_1: $\forall y_1, y_2 \in Y \quad y_1 + y_2 \in Y$,

U_2: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, y \in Y \quad \lambda \cdot y \in Y$.

Beispiel 25: Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $Y \subseteq X$ ein Untervektorraum von X, so ist die Einschränkung $\|\cdot\||_Y$ der Normfunktion auf Y eine Normfunktion und daher Y ein normierter Raum.

Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume mit den Eigenschaften: Y ist ein Untervektorraum von X und $\|\cdot\|_Y$ ist die Einschränkung von $\|\cdot\|_X$ auf Y, so nennt man $(Y, \|\cdot\|_Y)$ einen normierten Unterraum von $(X, \|\cdot\|_X)$. $\diamond$

Wie schon mehrfach betont, befasst sich die Funktionalanalysis schwerpunktmäßig mit Funktionen- und Abbildungsräumen. Diese sind in der Regel normierte Räume. Hier ein erstes Beispiel für einen solchen Fall:

Beispiel 26: Es sei $(B(X, \mathbb{K}), d_\infty)$ der in Definition 44 eingeführte Raum der beschränkten Funktionen auf einer Menge X.

Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, $g : X \to \mathbb{K}$ kann man punktweise addieren und mit Zahlen $\lambda \in \mathbb{K}$ multiplizieren:

$$f + g : \; X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

und

$$\lambda \cdot f : \; X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \lambda f(x).$$

Eine zwar etwas längliche aber direkte Rechnung zeigt, dass die Menge

$$\operatorname{Fun}(X, \mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K}\}$$

mit diesen beiden Operationen zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum wird, und offensichtlich gilt

$$B(X, \mathbb{K}) \subseteq \operatorname{Fun}(X, \mathbb{K}).$$

Tatsächlich ist $B(X, \mathbb{K})$ ein Untervektorraum von $\operatorname{Fun}(X, \mathbb{K})$: Man definiert zunächst

$$\|f\|_\infty := d_\infty(f, 0) = \sup(|f(x)| : x \in X),$$

wobei 0 die Nullfunktion ist. Sind f und g beschränkte Funktionen, so gilt dann

$$\forall x \in X \quad |(f + g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|,$$

also ist $f + g$ eine durch $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ beschränkte Funktion und es gilt

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ist f eine beschränkte Funktion und $\alpha \in \mathbb{K}$, so gilt

$$\forall x \in X \quad |(\alpha f)(x)| = |\alpha| \, |f(x)|,$$

also ist αf eine durch $|\alpha| \|f\|_\infty$ beschränkte Funktion und es gilt

$$\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty.$$

Folglich ist $B(X, \mathbb{K})$ tatsächlich ein Untervektorraum von $\operatorname{Fun}(X, \mathbb{K})$ und die Abbildung $\| \cdot \|_\infty$ besitzt die Homogenitätseigenschaft und erfüllt die Dreiecksungleichung. Offensichtlich gilt auch

$$\|f\|_\infty = d_\infty(f, 0),$$

wobei 0 die Nullabbildung ist. Die Reflexivität von d_∞ liefert dann die Eigenschaft 1 einer Norm. $\diamond$

Reformulierung einiger metrischer Begriffe

An diesem Punkt ist es eine nützliche Übung systematisch Begriffe und Ergebnisse für metrische Räume in ihrer speziellen Ausprägung für normierte Räume zu formulieren. Im Folgenden wird dies beispielhaft getan.

Eine Folge (x_k) in dem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist konvergent genau dann, wenn es ein $x \in X$ gibt, mit der Eigenschaft:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k > n\ \|x_k - x\| < \epsilon.$$

Eine Folge (x_k) in X ist eine Cauchyfolge genau dann, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k, \ell > n\ \|x_k - x_\ell\| < \epsilon.$$

Natürlich ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt, und jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Interessant sind wiederum die vollständigen normierten Räume – sie haben sogar einen eigenen Namen:

Definition 53: *Einen vollständigen normierten Raum nennt man nach dem polnischen Mathematiker Stefan Banach (1892 – 1945) Banachraum.*

Beispiele für Banachräume sind die p-normierten Räume $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ – siehe Korollar 33, sowie der gerade diskutierte Funktionenraum $(\mathrm{B}(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$, so nimmt das ϵ-δ-Kriterium für die Stetigkeit in einem Punkt $x_0 \in X$ die folgende Form an:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \epsilon.$$

Stetigkeit der Rechenoperationen

Für das Arbeiten in normierten Räumen muss klarerweise die Beziehung zwischen der Addition und der skalare Multiplikation einerseits und dem von der Metrik gelieferten Konvergenzbegriff andererseits geklärt werden. Dies leistet das nächste Ergebnis:

Satz 54: *In einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned} + : X \times X \to X, &\qquad (x, y) \mapsto x + y \\ \cdot : \mathbb{K} \times X \to X, &\qquad (\alpha, x) \mapsto \alpha x \\ \|\cdot\| : X \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

stetig.

Beweis: Zunächst sei festgehalten, dass die Mengen $X \times X$ und $\mathbb{K} \times X$ als Produkte metrischer Räume zu verstehen sind – siehe Abschnitt 1.5. Die Produktmetrik $d_{X\times X}$ ist also durch die Formel

$$d_{X\times X}((x,y),(x',y')) = \|x - x'\| + \|y - y'\|$$

gegeben, während für die Produktmetrik $d_{\mathbb{K}\times X}$ die Formel

$$d_{\mathbb{K}\times X}((\alpha,x),(\alpha',x')) = |\alpha - \alpha'| + \|x - x'\|$$

gilt.

Es sei nun (x_k, y_k) eine gegen (x,y) konvergente Folge in $X \times X$. Sei weiter $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\forall k > n \quad d_{X\times X}((x_k,y_k),(x,y)) = \|x_k - x\| + \|y_k - y\| < \epsilon.$$

Andererseits gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\|(x_k + y_k) - (x + y)\| \leq \|x_k - x\| + \|y_k - y\|.$$

Zusammen genommen folgt also wie behauptet

$$\lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = x + y.$$

Als Nächstes betrachtet man eine gegen (α, x) konvergente Folge (α_k, x_k) in $\mathbb{K} \times X$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Folgen (α_k) und (x_k) sind nach Satz 32 konvergent. Es sei $C > 0$ eine Schranke für die Folge (α_k). Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\forall k > n \quad \|x_k - x\| < \frac{\epsilon}{2C}$$

und im Fall $\|x\| \neq 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\forall k > m \quad |\alpha_k - \alpha| < \frac{\epsilon}{2\|x\|}.$$

Ist $\|x\| = 0$, so setzt man $m = n$.

Für $k > \max(n,m)$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\|\alpha_k x_k - \alpha x\| &= \|\alpha_k(x_k - x) + (\alpha_k - \alpha)x\| \\
&\leq |\alpha_k|\|x - x_k\| + |\alpha_k - \alpha|\|x\| \\
&\leq C\tfrac{\epsilon}{2C} + \tfrac{\epsilon}{2\|x\|}\|x\| = \epsilon,
\end{aligned}$$

wobei im Fall $\|x\| = 0$ der zweite Summand in der letzten Zeile nicht auftritt. Es gilt also wie behauptet

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k x_k = \alpha x.$$

Die Stetigkeit der Normabbildung ergibt sich aus der Stetigkeit der zugehörigen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$: Nach Satz 36 ist dann nämlich auch $\|x\| = d(x, 0)$ stetig. □

KOROLLAR 55: *Es seien* (x_k) *und* (y_k) *konvergente Folgen in* X *und* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Dann sind die Folgen* $(x_k) + (y_k) = (x_k + y_k)$ *und* $\alpha(x_k) = (\alpha x_k)$ *konvergent. Die Menge* kF(X) *der konvergenten Folgen des normierten Raums* $(X, \|\cdot\|)$ *bildet also mit der gliedweisen Addition und skalaren Multiplikation einen* $\mathbb{K}$*-Vektorraum.*

BEMERKUNG: Im Abschnitt 2.3 wird gezeigt, dass kF(X) sogar ein normierter Raum ist.

Im Zusammenhang mit der Stetigkeit der Normfunktion ist die folgende Norm-Variante der Vierecksungleichung zu nennen, die häufig nützliche Abschätzungen zulässt:

FESTSTELLUNG 56: *Jede Norm besitzt die Eigenschaft*

$$\forall x, y \in X \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

BEWEIS: Für die zur Norm gehörende Metrik gilt nach Feststellung 31 die Ungleichung

$$|d(x, 0) - d(y, 0)| \leq d(x, y) + d(0, 0).$$

Diese ist identisch mit der behaupteten Ungleichung. □

Feststellung 56 kann man auch so ausdrücken: Die Normabbildung ist dehnungsbeschränkt mit Dehnungsschranke 1.

Jeden metrischen Raum kann man nach Satz 9 vervollständigen, also auch jeden normierten Raum. Es stellt sich aber die Frage, ob diese Vervollständigung ein normierter Raum ist. Der Beweis für die positive Antwort soll hier aus den früher schon genannten Gründen nur kommentiert werden.

Satz 57: *Es sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum. Dann ist die Vervollständigung* $(\widehat{X}, \widehat{d})$ *bezüglich der zu* $\|\cdot\|$ *gehörenden Metrik* d *ein normierter Raum, wobei für die Addition, die Multiplikation mit Skalaren sowie für die Normfunktion* $\widehat{\|\cdot\|} = \widehat{d}(\cdot, 0)$ *die folgenden Gleichungen gelten:*

1. *Sind* $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$ *und* (x_k), (y_k) *Cauchyfolgen in* X *mit der Eigenschaft* $\lim_{k\to\infty} i(x_k) = \widehat{x}$ *und* $\lim_{k\to\infty} i(y_k) = \widehat{y}$, *so gilt:*

$$\widehat{x} + \widehat{y} = \lim_{k\to\infty} i(x_k + y_k).$$

2. *Ist* $\widehat{x} \in \widehat{X}$ *und* (x_k) *eine Cauchyfolge in* X *mit der Eigenschaft* $\lim_{k\to\infty} i(x_k) = \widehat{x}$, *so gilt für jedes* $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\alpha\widehat{x} = \lim_{k\to\infty} i(\alpha x_k).$$

3. *Ist* $\lim_{k\to\infty} i(x_k) = \widehat{x}$ *mit einer Cauchyfolge* (x_k) *in* X, *so gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \widehat{\|\widehat{x}\|}.$$

Bemerkung: Die in den Punkten 1 bis 3 des Satzes genannten Eigenschaften kann man salopp so zusammenfassen: Die Rechenoperationen und die Norm der Komplettierung $\widehat{X}$ sind die stetigen Fortsetzungen der Rechenoperationen und der Norm von X, wobei man wie bei Satz 9 beschrieben, X und $i(X)$ gleichsetzt. Die stetigen Fortsetzungen sind eindeutig bestimmt, da X in $\widehat{X}$ dicht liegt. Noch lässiger formuliert:

Jeder normierte Raum X *ist normierter Unterraum eines Banachraums* $\widehat{X}$, *wobei* X *dicht in* $\widehat{X}$ *liegt.*

Zum Beweis des Satzes definiert man die Addition und die skalare Multiplikation durch die im Satz angegebenen Gleichungen, muss dann allerdings zeigen, dass die rechten Seiten der Gleichungen unabhängig von den gewählten Cauchyfolgen sind. Dies ergibt sich aus der Konstruktion der Vervollständigung $\widehat{X}$ als metrischer Raum und aus der Stetigkeit von i.