

1.7 Metrische Räume von Abbildungen

In der linearen Algebra betrachtet man anfangs das Problem der Lösung linearer Gleichungssysteme

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

Dabei stellt sich heraus, dass ein Verständnis der Struktur der Lösungsmenge und der Lösbarkeit solcher Systeme erreicht wird, indem man die Koeffizientenmatrizen A als lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax$$

auffasst und diese untersucht.

Das Lösungsverhalten einer gewöhnlichen Differentialgleichung wie etwa

$$m \frac{d^2 f}{dt^2} + D \frac{df}{dt} + kf = 0$$

kann ebenfalls besser verstanden werden, indem man die zugehörige Abbildung

$$T : C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}), \quad f \mapsto m \frac{d^2 f}{dt^2} + D \frac{df}{dt} + kf$$

losgelöst von der konkreten Gleichung untersucht. Hierbei ist $C^2([a, b], \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum(!) der 2-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Man beachte, dass die Abbildung T linear ist.

In der Funktionalanalysis werden systematisch lineare Abbildungen $T : D \rightarrow W$ untersucht, deren Definitionsbereich D ein Vektorraum bestehend aus Abbildungen oder Funktionen ist. In diesem Abschnitt wird als erster Schritt in diese Richtung eine Klasse metrischer Räume eingeführt, die in der Funktionalanalysis ständig in Erscheinung tritt, wenn auch häufig nur im Hintergrund, vor dem sich Anderes abspielt.

DEFINITION 44: *Es sei X eine nichtleere Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt beschränkt, falls $f(X) \subseteq Y$ beschränkt ist. Die Menge aller beschränkter Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ wird mit $B(X, Y)$ bezeichnet.*

Da die offenen Kugeln in \mathbb{R} versehen mit der Standardmetrik die offenen Intervalle (a, b) sind, ist eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann beschränkt, falls

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \leq C$$

mit einer Konstanten $C > 0$ gilt.

Die Menge $B(X, Y)$ trägt eine »natürliche« Metrik:

FESTSTELLUNG 45: *Durch*

$$d_\infty(f, g) := \sup(d(f(x), g(x)) : x \in X). \quad (19)$$

wird eine Metrik auf $B(X, Y)$ definiert, die Supremumsmetrik.

BEWEIS: Es ist zunächst nachzuweisen, dass die Abbildung d_∞ wohldefiniert ist: Da f und g beschränkt sind, gibt es offene Kugeln mit der Eigenschaft $B(y_f, r_f) \supseteq f(X)$ und $B(y_g, r_g) \supseteq g(X)$. Für jedes $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), y_f) + d(y_f, y_g) + d(y_f, g(x)) \\ &\leq r_f + d(y_f, y_g) + r_g. \end{aligned}$$

Folglich ist die Menge, von der man in (19) das Supremum bildet, beschränkt, womit das Supremum selbst endlich ist.

Die Abbildung d_∞ ist offensichtlich symmetrisch, und es gilt $d_\infty(f, f) = 0$. Gilt andererseits $d_\infty(f, g) = 0$, so folgt $d(f(x), g(x)) = 0$ für alle $x \in X$ und damit $f = g$, wegen der Reflexivität von d . d_∞ ist also reflexiv.

Zum Beweis der Dreiecksungleichung wählt man beschränkte Abbildungen f, g, h ; für jedes $x \in X$ gilt dann:

$$d(f(x), h(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x))$$

nach der Dreiecksungleichung für d . Diese Ungleichung bleibt beim Übergang zum Supremum erhalten. \square

Im Weiteren wird die Menge $B(X, Y)$ stets stillschweigend als metrischer Raum mit der Metrik d_∞ aufgefasst, sofern nichts anderes gesagt wird. Man beachte dabei, dass in der Notation $B(X, Y)$ die Metrik d von Y nicht explizit in Erscheinung tritt, obwohl d_∞ natürlich von d abhängt. Dies führt jedoch in diesem Skript nirgends zu Problemen.

KONVERGENZ VON ABBILDUNGSFOLGEN: Um den Konvergenzbegriff in dem metrischen Raum $(B(X, Y), d_\infty)$ zu verstehen, betrachte man eine konvergente Folge (f_k) beschränkter Abbildungen $f_k : X \rightarrow Y$. Es gibt also eine beschränkte Abbildung $f : X \rightarrow Y$ für die gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall k > n \quad d_\infty(f_k, f) < \epsilon. \quad (20)$$

Da für jedes $x \in X$ nach Definition von d_∞ die Ungleichung

$$d(f_k(x), f(x)) \leq d_\infty(f_k, f)$$

gilt, folgt aus (20)

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall k > n \forall x \in X \quad d(f_k(x), f(x)) < \epsilon. \quad (21)$$

Insbesondere gilt für jedes $x \in X$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x). \quad (22)$$

Die Bedingung (23) ist aber viel stärker als (22): Schreibt man für (22) das Konvergenzkriterium auf, so ergibt sich

$$\forall x \in X \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall k > n \quad d(f_k(x), f(x)) < \epsilon. \quad (23)$$

Bei gegebenem ϵ hängt die Schranke n , ab der die Annäherung an den Grenzwert unter ϵ liegt, also von x ab. Bei variierendem x variiert auch n und man findet möglicherweise keine von x unabhängige Schranke. In (23) dagegen gilt die zu ϵ gehörende Schranke n unabhängig von x . Motiviert durch diese Situation definiert man:

DEFINITION 46: *Eine Folge (f_k) von Abbildungen $f_k : X \rightarrow Y$ der nicht-leeren Menge X in den metrischen Raum (Y, d) heißt punktweise konvergent gegen die Abbildung $f : X \rightarrow Y$, falls für jedes $x \in X$ die Gleichung (22) gilt.*

Liegt die Folge (f_k) im Raum $B(X, Y)$ und konvergiert bezüglich der Metrik d_∞ gegen f , so nennt man die Folge (f_k) gleichmäßig konvergent gegen f .

Es wurde bereits gezeigt:

FESTSTELLUNG 47: *Konvergiert die Folge (f_k) gleichmäßig gegen f , so auch punktweise.*

Dieses Ergebnis besitzt eine nützliche Konsequenz: Weiß man, dass eine Folge (f_k) gleichmäßig konvergiert, so kann man ihren Grenzwert *punktweise* berechnen. Dies kann man auch zum Nachweis gleichmäßiger Konvergenz nutzen, da der punktweise Grenzwert als Kandidat für den Grenzwert bezüglich d_∞ eingesetzt werden kann. Das folgende Beispiel liefert eine Anwendung dieses Prinzips und zeigt, dass die Implikation \Leftarrow in Feststellung 47 nicht gilt.

BEISPIEL 21: Im Raum $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der beschränkten, reellen Zahlfolgen betrachte man die durch

$$f_k(n) := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

definierten Abbildungen/Folgen f_k , $k \in \mathbb{N}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(n) = 0.$$

Die Folge (f_k) ist also punktweise konvergent gegen die konstante Folge

$$0 = (0, 0, 0, \dots).$$

Andererseits gilt

$$d_\infty(f_k, 0) = \sup\left\{\left|1 - \frac{1}{n}\right|^k : n \in \mathbb{N}\right\} = 1.$$

Die Folge (f_k) konvergiert also nicht gleichmäßig gegen 0, sie ist in $(B(X, Y), d_\infty)$ keine Cauchyfolge.

VOLLSTÄNDIGKEIT VON $B(X, Y)$: Es soll nun die Frage untersucht werden, unter welchen Bedingungen $(B(X, Y), d_\infty)$ vollständig ist. Dazu ist es nützlich die Elemente $y \in Y$ als konstante Abbildungen $X \rightarrow Y$ aufzufassen:

$$\iota : Y \rightarrow B(X, Y), \quad y \mapsto (\iota(y) : X \rightarrow Y, x \mapsto y). \quad (24)$$

ι ist eine Isometrie ist, wie man direkt nachrechnet:

$$d_\infty(\iota(y), \iota(y')) = d(y, y').$$

Es ist daher »natürlich« (zumindest für Mathematiker) die Elemente $y \in Y$ und die konstanten Abbildungen $\iota(y)$ »gleichzusetzen« oder zu »identifizieren«, was bedeutet, dass man so tut als ob Y eine Teilmenge von $B(X, Y)$ wäre, wobei die Einschränkung der Metrik d_∞ auf Y gleich d ist. Der Klarheit halber soll im Folgenden allerdings noch darauf verzichtet werden Y und $\iota(Y)$ gleichzusetzen.

FESTSTELLUNG 48: Die Menge $\iota(Y)$ ist abgeschlossen in $B(X, Y)$.

BEWEIS: Nach Satz 14 ist zu zeigen, dass jede konvergente Folge (f_k) in $\iota(Y)$ ihren Grenzwert in $\iota(Y)$ hat. Die f_k haben hierbei die Form $f_k = \iota(y_k)$

für gewisse $y_k \in Y$. Nach Feststellung 47 ist der Grenzwert f der Folge (f_k) identisch mit dem punktweisen Grenzwert, das heißt es gilt

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nicht von x abhängt, ist die Behauptung bewiesen. \square

Die Kombination von Satz 15 mit Feststellung 48 liefert folgende Einsicht: Ist $B(X, Y)$ vollständig, so auch $\iota(Y)$ und damit Y selbst. Interessant ist nun, dass man diese Implikation auch umkehren kann.

SATZ 49: *Der metrische Raum $(B(X, Y), d_\infty)$ ist vollständig genau dann, wenn der metrische Raum (Y, d) vollständig ist.*

BEWEIS: Es ist nur noch die Implikation \Leftarrow zu beweisen. Hierzu sei (f_k) eine Cauchyfolge in $B(X, Y)$, es gilt also

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall i, j > n \quad d_\infty(f_i, f_j) < \epsilon.$$

Kombiniert man diese Bedingung mit den Ungleichungen

$$\forall x \in X \quad d(f_i(x), f_j(x)) \leq d_\infty(f_i, f_j),$$

so ergibt sich

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall i, j > n \forall x \in X \quad d(f_i(x), f_j(x)) < \epsilon. \quad (25)$$

Hieraus folgt, dass die Folgen $(f_k(x))$ für jedes $x \in X$ eine Cauchyfolge in Y bilden. Da Y nach Voraussetzung vollständig ist, haben diese Folgen einen Grenzwert und man kann eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ durch die Gleichung

$$f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

definieren. Die Vollständigkeit von $B(X, Y)$ ist bewiesen, wenn man zeigen kann, dass die Abbildung f beschränkt ist und die Folge (f_k) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Nach Satz 32 ist für festes $i \in \mathbb{N}$ die Folge $((f_i(x), f_j(x)))_{j \in \mathbb{N}}$ konvergent im Produkt $Y \times Y$ mit dem Grenzwert $(f_i(x), f(x))$. Da die Metrik $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(f_i(x), f_j(x)) = d(f_i(x), f(x)).$$

Kombiniert man dies mit (25) ergibt sich:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall i > n \forall x \in X \quad d(f_i(x), f(x)) \leq \epsilon. \quad (26)$$

Sei nun $\epsilon > 0$ und $i > n$, n wie in (26) gewählt. Nach Voraussetzung ist $f_i(X) \subseteq B(y, r)$ für ein $y \in Y$ und $r > 0$. Hieraus erhält man für jedes $x \in X$

$$d(f(x), y) \leq d(f_i(x), f(x)) + d(y, f_i(x)) \leq \epsilon + r,$$

das heißt f ist beschränkt. Die Bedingung (26) lässt sich nun umschreiben in

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall i > n \quad d_\infty(f_i, f) \leq \epsilon,$$

womit man die angestrebte gleichmäßige Konvergenz gezeigt hat. \square

Das folgende Beispiel zeigt, dass sich bereits die Stetigkeit nicht von den Gliedern einer punktweise konvergenten Funktionenfolge auf den Grenzwert überträgt. Daher ist es interessant zu untersuchen wie sich der gleichmäßige Grenzwert in bezug auf dieses Problem verhält.

BEISPIEL 22: Im Raum $B([0, 1], \mathbb{R})$ betrachte man die Potenzfunktionen $f_k(x) := x^k$. Für $x \in [0, 1)$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$; weiter ist $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(1) = 1$. Der punktweise Grenzwert ist also an der Stelle $x = 1$ unstetig. Andererseits konvergiert die Folge (x^k) nicht gleichmäßig gegen den punktweisen Grenzwert f , denn es gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \sup(d(f_k(x), f) : x \in [0, 1]) = 1.$$

DEFINITION 50: Für zwei metrische Räume X und Y bezeichne $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $BC(X, Y)$ die Menge der beschränkten stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$.

Nach den Sätzen 42 und 40 gilt für einen kompakten metrischen Raum X : $C(X, Y) = BC(X, Y)$ und $d_\infty = d_{\max}$.

$BC(X, Y)$ ist ein metrischer Unterraum von $B(X, Y)$. Da konstante Abbildungen stetig sind, hat man außerdem die Abbildung $\iota : Y \rightarrow BC(X, Y)$. Man sieht also wie im Fall des Raums $B(X, Y)$, dass $\iota(Y)$ abgeschlossen in $BC(X, Y)$ ist, und dass die Vollständigkeit von $BC(X, Y)$ die Vollständigkeit von $\iota(Y)$ impliziert. Es gilt aber erheblich mehr:

SATZ 51: Die Menge $BC(X, Y)$ ist abgeschlossen in $(B(X, Y), d_\infty)$. Insbesondere ist der metrische Raum $(BC(X, Y), d_\infty)$ vollständig genau dann, wenn der metrische Raum (Y, d) vollständig ist.

BEWEIS: Die Abgeschlossenheit von $BC(X, Y)$ ist äquivalent zur Offenheit von $B(X, Y) \setminus BC(X, Y)$. Es ist also zu zeigen, dass es um jede nicht stetige Funktion $f \in B(X, Y)$ eine Kugel $B(f, r)$ gibt, die vollständig in $B(X, Y) \setminus BC(X, Y)$ liegt.

Es sei $x_0 \in X$ ein Unstetigkeitspunkt von f . Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass für jede offene Kugel $B(x_0, \delta)$ gilt: $f(B(x_0, \delta)) \not\subseteq B(f(x_0), \epsilon)$. Jedes $g \in B(f, \frac{\epsilon}{3})$ besitzt dann folgende Eigenschaft: Ist $x \in B(x_0, \delta)$ mit $f(x) \notin B(f(x_0), \epsilon)$, so gilt $g(x) \notin B(g(x_0), \frac{\epsilon}{3})$, denn:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(x_0)) + d(g(x_0), f(x_0)) \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + d(g(x), g(x_0)). \end{aligned}$$

Es folgt, dass g nicht stetig in x_0 ist und damit $B(f, \frac{\epsilon}{3}) \subseteq B(X, Y) \setminus BC(X, Y)$ gilt.

Es sei nun (Y, d) vollständig. Dann ist $B(X, Y)$ nach Satz 49 vollständig und damit auch die abgeschlossene Teilmenge $BC(X, Y)$ nach Satz 15. \square

DIE GRENZWERTBILDUNG ALS OPERATOR: Im Folgenden wird ein typisch funktionalanalytisches Vorgehen am Beispiel der Grenzwertbildung dargestellt, nämlich das Auffassen von Operationen wie Grenzwertbildung, Differentiation oder Integration als Abbildungen auf Funktionenräumen.

Der metrische Raum $B(\mathbb{N}, Y)$ der beschränkten Folgen in dem metrischen Raum (Y, d) umfasst die Menge $kF(Y)$ der konvergenten Folgen in Y . Schränkt man d_∞ auf $kF(Y)$ ein, so erhält man einen metrischen Unterraum von $B(\mathbb{N}, Y)$. Für alle Elemente von $kF(Y)$ kann der Grenzwert gebildet werden; man erhält so eine Abbildung

$$\lim : kF(Y) \rightarrow Y, (y_k) \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} y_k, \quad (27)$$

und es ist naheliegend nach den Eigenschaften dieser Abbildung zu fragen, zum Beispiel nach ihrer Stetigkeit.

Es seien $(y_k), (y'_k) \in kF(Y)$ mit den Grenzwerten $y, y' \in Y$; nach Feststellung 31 ist die Metrik d eine stetige Abbildung $Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$. Hieraus ergibt sich unter Benutzung von Satz 32

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(y_k, y'_k) = d(y, y').$$

Andererseits gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Definition $d(y_k, y'_k) \leq d_\infty((y_k), (y'_k))$. Es folgt

$$d(y, y') \leq d_\infty((y_k), (y'_k))$$

und daher gilt für die Expansion des Limesoperators (27)

$$E(\lim) = \sup\left(\frac{d((\lim_{k \rightarrow \infty} y_k), (\lim_{k \rightarrow \infty} y'_k))}{d_\infty((y_k), (y'_k))} : (y_k) \neq (y'_k)\right) \leq 1;$$

dieser ist also insbesondere stetig. Betrachtet man konstante Folgen, so sieht man, dass sogar die Gleichheit

$$E(\lim) = 1 \tag{28}$$

gilt.

Die Stetigkeit des Limesoperators kann man als Grenzwertvertauschungssatz formulieren: Konvergiert die Folge $((y_{k,\ell})_{\ell \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ von konvergenten Folgen gleichmäßig, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} y_{k,\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} y_{k,\ell}.$$

Literatur

- [H-S] F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Spektrum Verlag.