Vorlesung Funktionalanalysis – Übungsblatt 3

Hagen Knaf, SS 2016

1. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften kompakter Mengen:

   - Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist selbst kompakt.
   - Die Vereinigungsmenge endlich vieler kompakter Mengen ist selbst kompakt.

   Beweise von Herr Aulbach:

   Es sei (x_k) eine Folge in der abgeschlossenen Teilmenge A der kompakten Menge K. Da (x_k) eine Folge in K ist, besitzt diese nach Definition der Kompaktheit eine konvergente Teilfolge (x_{k_ℓ}), deren Grenzwert x^* in K liegt. Die Teilfolge (x_{k_ℓ}) liegt nach Voraussetzung in A. Die Charakterisierung der Abgeschlossenheit über Folgen (Satz 14) zeigt $x^* \in A$, womit die erste Behauptung bewiesen ist.

   Es seien $K_1, \ldots, K_r$ kompakte Teilmengen des metrischen Raums (X, d) und (x_k) sei eine Folge in $K := K_1 \cup \ldots \cup K_r$. Nach dem Schubfachprinzip gibt es dann ein K_i, in dem eine Teilfolge (x_{k_ℓ}) enthalten ist. Da K_i kompakt ist, besitzt diese eine konvergente Teilfolge $(x_{k_{\ell_m}})$ mit Grenzwert $x^* \in K_i$. Da $(x_{k_{\ell_m}})$ eine Teilfolge von (x_k) ist und $x^* \in K$ gilt, ist die zweite Behauptung damit bewiesen.

2. In dieser Aufgabe geht es um die Approximation von stetigen Funktionen $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ durch Polynome, wobei die Metrik $d_{\max}(f,g) := \max(|f(t) - g(t)| : t \in [a,b])$ verwendet wird.

   Die Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

   (a) Es sei $P_n \subset C([a,b], \mathbb{R})$ die Menge der Polynome vom Grad n. Zeigen Sie: Ist

   $$(p_k), \quad p_k(t) = a_{n,k}t^n + a_{n-1,k}t^{n-1} + \ldots + a_{1,k}t + a_{0,k},$$

   eine Cauchyfolge in P_n, so sind die Koeffizientenfolgen $(a_{i,k})$, $i \in \{0, \ldots, n\}$ konvergent in $\mathbb{R}$ und es gilt

   $$\lim_{k\to\infty} p_k = (\lim_{k\to\infty} a_{n,k})t^n + (\lim_{k\to\infty} a_{n-1,k})t^{n-1} + \ldots + (\lim_{k\to\infty} a_{1,k})t + \lim_{k\to\infty} a_{0,k}$$

   Schließen Sie hieraus, dass P_n eine vollständige und abgeschlossene Teilmenge von $C([a,b], \mathbb{R})$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$F : P_n \to \mathbb{R}^{n+1},\ p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0 \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

bijektiv und stetig ist und auch die Umkehrabbildung stetig ist. Hierbei ist P_n mit der Metrik $d_{\max}$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ mit irgendeiner der Metriken d_p versehen.

Folgern Sie hieraus: Die Teilmenge $K \subset P_n$ ist kompakt genau dann, wenn $F(K)$ kompakt ist.

(c) Zeigen Sie unter Verwendung der Teilaufgaben (a) und (b), dass zu jeder Funktion $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ ein Polynom $p \in P_n$ existiert, für das

$$d_{\max}(f, p) = \min(d_{\max}(f, q) : q \in P_n)$$

gilt, das also f bestmöglich approximiert.

Lösung: Es sei $q_0 \in P_n$ und $r := d(f, q_0)$. Dann liegt jede Bestapproximation p von f, falls eine solche existiert, in der abgeschlossenen Kugel $B[f, r]$. Die Menge $B[f, r] \cap P_n$ ist beschränkt und nach Teilaufgabe (a) abgeschlossen. Anwendung der Ergebnisse von (b) liefert: Das Bild $F(B[f, r] \cap P_n)$ ist abgeschlossen und beschränkt also kompakt, womit auch $B[f, r] \cap P_n$ kompakt ist. Nach Korollar 43 besitzt folglich die stetige Funktion

$$d(f, \cdot) : \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ g \mapsto d(f, g)$$

ein Minimum $d(f, p)$ in der Menge $B[f, r] \cap P_n$.

(d) Es seien $p_1, p_2 \in P_n$ zwei Bestapproximationen der Funktion $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ im Sinn von Teilaufgabe (c). Zeigen Sie, dass dann auch $\lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2$ für jedes $\lambda \in [0, 1]$ eine Bestapproximation der Funktion f ist.

Hinweis: Schreiben Sie f als $\lambda f + (1 - \lambda) f$.

(e) Betrachten Sie die Funktion $\sin(t) \in C([0, \pi], \mathbb{R})$ und bestimmen Sie ein $p \in P_2$ mit der Eigenschaft

$$p(0) = \sin(0),\ p(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}),\ p(\pi) = \sin(\pi).$$

Geben Sie ein Polynom $q \in P_2$ an, das $\sin(t)$ im Sinn von Teilaufgabe (c) besser als p approximiert.