Vorlesung Funktionalanalysis – Übungsblatt 2

Hagen Knaf, SS 2016

1. Bestimmen Sie eine obere Schranke für die Expansion $E(f)$ einer linearen Abbildung
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},$$
wobei der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik d_2 versehen sei.

Lösung von Frau ?: Es gilt
$$E(f) = \sup\left(\frac{d_2(Ax, Ax')}{d_2(x, x')} : x, x' \in \mathbb{R}^n\right),$$
folglich beginnt man damit die Größe $d_2(Ax, Ax')$ nach oben abzuschätzen. Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ die Zeilen der Matrix A, so gilt nach den Regeln der Matrixmultiplikation
$$Ax = \begin{pmatrix} \langle a_1, x\rangle \\ \langle a_2, x\rangle \\ \vdots \\ \langle a_n, x\rangle \end{pmatrix},$$
wobei $\langle x, x\prime\rangle$ das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, x' \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Es ergibt sich
$$\begin{aligned} d_2(Ax, Ax') &= \sqrt{\sum_{k=1}^n (\langle a_k, x\rangle - \langle a_k, x'\rangle)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n \langle a_k, x - x'\rangle^2} \\ &\le \sqrt{\sum_{k=1}^n \langle a_k, a_k\rangle\langle x - x', x - x'\rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n \langle a_k, a_k\rangle}\ d_2(x, x'), \end{aligned}$$
wobei man in der dritten Zeile die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung einsetzt. Es folgt:
$$E(f) \le \sqrt{\sum_{k=1}^n \langle a_k, a_k\rangle} = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2},$$
wobei a_{ij} die Koeffizienten der Matrix A sind.

2. Finden Sie Beispiele dehnungsbeschränkter Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ mit der Eigenschaft $E(g \circ f) < E(f)E(g)$.

Lösung von Frau Kiegelmann: Man betrachtet die Funktionen

$$f : [1,2] \to [\frac{1}{2}, 1],\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

und

$$g : [\frac{1}{2}, 1] \to [1,2],\ x \mapsto \frac{2}{x}$$

wobei man überall die Standardmetrik von $\mathbb{R}$ benutzt: $d(x, x') = |x - x'|$.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} E(f) &= \sup(\tfrac{|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}|}{|x-x'|} : x, x' \in [1,2], x \neq x') \\ &= \sup(\tfrac{\frac{|x-x'|}{|x||x'|}}{|x-x'|} : x, x' \in [1,2], x \neq x') \\ &= \sup(\tfrac{1}{|x||x'|} : x, x' \in [1,2], x \neq x') = 1 \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} E(g) &= \sup(\tfrac{|\frac{2}{x} - \frac{2}{x'}|}{|x-x'|} : x, x' \in [\tfrac{1}{2}, 1], x \neq x') \\ &= \sup(\tfrac{2}{|x||x'|} : x, x' \in [\tfrac{1}{2}, 1], x \neq x') = 8. \end{aligned}$$

Andererseits ist $(g \circ f)(x) = 2x$, woraus sich

$$E(g \circ f) = \sup(\frac{|2x - 2x'|}{|x - x'|} : x, x' \in [1,2], x \neq x') = 2$$

ergibt.

3. Betrachten Sie die Menge $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit der in der Aufgabe 3 von Blatt 1 definierten Metrik $d_{\max}$. Sind die folgenden Folgen in diesem Raum konvergent? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

   (a) (f_k) mit $f_k(x) := \sin(x)^k$,

   (b) (g_k) mit $g_k(x) := \sin(kx)$,

   (c) (h_k) mit $h_k(x) := x - \frac{1}{k}\sin(kx)$.

Lösung:

(a): Es gilt $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$, woraus folgt:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |\sin(\frac{3\pi}{2})^k - \sin(\frac{3\pi}{2})^{k+1}| = 2$$

und folglich

$$\begin{aligned} d_{\max}(\sin(x)^k, \sin(x)^{k+1})) &= \sup(|\sin(x)^k - \sin(x)^{k+1}| : x \in [0, 2\pi]) \\ &\geq |\sin(\tfrac{3\pi}{2})^k - \sin(\tfrac{3\pi}{2})^{k+1}| = 2. \end{aligned}$$

Folglich ist (f_k) keine Cauchyfolge, also auch nicht konvergent.

(b): Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\sin(4k\frac{\pi}{4}) = 0$ und $\sin((4k+2)\frac{\pi}{4}) \in \{-1, 1\}$, woraus folgt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |g_{4k}(\frac{\pi}{4}) - g_{4k+2}(\frac{\pi}{4})| = 1.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} d_{\max}(g_{4k}, g_{4k+2}) &= \sup(|g_{4k}(x) - g_{4k+2}(x)| : x \in [0, 2\pi]) \\ &\geq |g_{4k}(\tfrac{\pi}{4}) - g_{4k+2}(\tfrac{\pi}{4})| = 1. \end{aligned}$$

Folglich ist (g_k) keine Cauchyfolge, also auch nicht konvergent.

(c): Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 2\pi]$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x - (x - \frac{1}{k}\sin(kx))| = |\frac{1}{k}\sin(kx)| \leq \frac{1}{k};$$

es folgt

$$d_{\max}(x, x - \frac{1}{k}\sin(kx)) \leq \frac{1}{k}.$$

Das Konvergenzkriterium zeigt nun die Konvergenz der Folge (h_k) gegen die Funktion $h(x) = x$: Ist nämlich $\epsilon > 0$ gegeben, so wählt man $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n} < \epsilon$ gilt. Dann gilt für alle $k > n$:

$$d_{\max}(x, x - \frac{1}{k}\sin(kx)) \leq \frac{1}{k} < \frac{1}{n} < \epsilon.$$