

VORLESUNG FUNKTIONALANALYSIS – ÜBUNGSBLATT 1

HAGEN KNAF, SS 2016

1. Betrachten Sie die reelle Ebene  $\mathbb{R}^2$  versehen mit der euklidischen Metrik  $d_2$  (siehe Vorlesung). Es sei  $X$  die Menge aller nicht leeren, endlichen Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ . Welche der drei definierenden Eigenschaften einer Metrik besitzen die folgenden beiden Abbildungen:

$$s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \min(d_2(a, b) \mid a \in A, b \in B),$$

$$c : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \max(d_2(a, b) \mid a \in A, b \in B).$$

2. Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass durch die Gleichung

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine weitere Metrik  $d'$  auf  $X$  definiert wird, und dass für jede Folge  $(x_k)$  in  $X$  gilt:  $(x_k)$  konvergiert bezüglich  $d$  gegen  $x$  genau dann, wenn  $(x_k)$  bezüglich  $d'$  gegen  $x$  konvergiert.

3. In der Analysis haben Sie stetige Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  betrachtet. Zeigen Sie, dass durch die Gleichung

$$d_{\max}(f, g) := \max(|f(x) - g(x)| : x \in [a, b])$$

eine Metrik auf der Menge  $C([a, b], \mathbb{R})$  aller stetigen Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist.