

VORLESUNG FUNKTIONALANALYSIS – ÜBUNGSBLATT 1

HAGEN KNAF, SS 2016

1. Betrachten Sie die reelle Ebene \mathbb{R}^2 versehen mit der euklidischen Metrik d_2 (siehe Vorlesung). Es sei X die Menge aller nicht leeren, endlichen Teilmengen des \mathbb{R}^2 . Welche der drei definierenden Eigenschaften einer Metrik besitzen die folgenden beiden Abbildungen:

$$\begin{aligned} s : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \min(d_2(a, b) \mid a \in A, b \in B), \\ c : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \max(d_2(a, b) \mid a \in A, b \in B). \end{aligned}$$

Lösung:

Zur Abbildung s : Die Symmetrie der Metrik d_2 liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} s(A, B) &= \min(d_2(a, b) \mid a \in A, b \in B) \\ &= \min(d_2(b, a) \mid a \in A, b \in B) = s(B, A); \end{aligned}$$

die Abbildung s ist also symmetrisch.

Es seien a_1, a_2, b drei verschiedene Punkte in \mathbb{R}^2 . Für die Teilmengen $A := \{a_1, a_2\}$ und $B := \{a_2, b\}$ gilt dann $s(A, B) = 0$. Es ist aber $A \neq B$, folglich ist s nicht reflexiv.

Es seien a_1, a_2, b, c vier verschiedene Punkte in \mathbb{R}^2 . Für die Teilmengen $A := \{a_1, a_2\}$, $B := \{a_2, b\}$ und $C := \{b, c\}$ gilt dann: $s(A, B) = 0$, $s(B, C) = 0$ und $s(A, C) \neq 0$. Folglich gilt die Dreiecksungleichung für s nicht.

Zur Abbildung c : Die Symmetrie der Metrik d_2 liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} c(A, B) &= \max(d_2(a, b) \mid a \in A, b \in B) \\ &= \max(d_2(b, a) \mid a \in A, b \in B) = c(B, A); \end{aligned}$$

die Abbildung c ist also symmetrisch.

Es sei A eine Teilmenge mit mindestens zwei verschiedenen Elementen a_1, a_2 . Dann gilt $c(A, A) \geq d_2(a_1, a_2) \neq 0$. Die Abbildung c ist also nicht reflexiv.

Die Dreiecksungleichung gilt: Es seien $A, B, C \in X$. Es gibt Elemente $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ mit $c(A, B) = d_2(a_1, b_1)$. Für jedes $c \in C$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung für d_2

$$c(A, B) = d_2(a_1, b_1) \leq d_2(a_1, c) + d_2(c, b_1) \leq c(A, C) + c(C, B).$$

2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass durch die Gleichung

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine weitere Metrik d' auf X definiert wird, und dass für jede Folge (x_k) in X gilt: (x_k) konvergiert bezüglich d gegen x genau dann, wenn (x_k) bezüglich d' gegen x konvergiert.

Lösung:

d' ist eine Metrik: Nur die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für d' ist nicht offensichtlich. Um sie zu beweisen startet man mit der Beobachtung, dass die Funktion

$$f(t) := \frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+\frac{1}{t}}$$

auf dem Intervall $(-1, \infty)$ streng monoton wachsend ist:

$$t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_1) < f(t_2).$$

Aus der Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für d ergibt sich durch Anwendung von f daher:

$$\frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)}.$$

Für die rechte Seite der Ungleichung gilt aber:

$$\begin{aligned} \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)}, \end{aligned}$$

also die behauptete Dreiecksungleichung für d' .

Konvergenz von Folgen: Es sei (x_k) eine konvergente Folge in (X, d) mit Grenzwert x und $\epsilon' > 0$. Wir wollen zeigen, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft $d'(x, x_k) < \epsilon'$ für alle $k > n$, denn dann konvergiert (x_k) auch in (X, d') gegen x .

Ohne Einschränkung kann man $\epsilon' < 1$ annehmen. Nach Voraussetzung gibt es dann zu $\epsilon := \frac{\epsilon'}{1-\epsilon'}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $d(x, x_k) < \epsilon$ für alle $k > n$. Für ein solches k gilt also

$$d'(x, x_k) = \frac{d(x, x_k)}{1 + d(x, x_k)} \leq \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} = \epsilon',$$

wie gewünscht.

Die Funktion $f(t) := \frac{t}{1+t}$ besitzt die streng monoton wachsende Umkehrfunktion $g(s) := \frac{s}{1-s}$. Es gilt daher

$$d(x, x') = \frac{d'(x, x')}{1 - d'(x, x')}.$$

Der Beweis dafür, dass aus der Konvergenz von (x_k) gegen x in (X, d') auch die Konvergenz von (x_k) gegen x in (X, d) folgt, kann man nun mit einer analogen Schlussweise führen.

3. In der Analysis haben Sie stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ betrachtet. Zeigen Sie, dass durch die Gleichung

$$d_{\max}(f, g) := \max(|f(x) - g(x)| : x \in [a, b])$$

eine Metrik auf der Menge $C([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist.

Lösung: In der Analysis wird der folgende Satz bewiesen: *Jede stetige Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum.*

Die Funktion $h(x) := |f(x) - g(x)|$, $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$, ist stetig: Die Differenz stetiger Funktionen, sowie die Verkettung stetiger Funktionen sind stetig. Folglich existiert $d_{\max}(f, g)$ für alle $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$.

Symmetrie:

$$\begin{aligned} d_{\max}(f, g) &= \max(|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]) \\ &= \max(|g(x) - f(x)| : x \in [a, b]) = d_{\max}(g, f). \end{aligned}$$

Reflexivität: Die Gleichung $d_{\max}(f, f) = 0$ ist offensichtlich richtig. Seien also $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $d_{\max}(f, g) = 0$. Dann gilt für jedes $x \in [a, b]$ die Gleichung $|f(x) - g(x)| = 0$ also $f(x) = g(x)$, und folglich $f = g$.

Dreiecksungleichung: Es seien $f, g, h \in C([a, b], \mathbb{R})$; wir wollen $d_{\max}(f, h) \leq d_{\max}(f, g) + d_{\max}(g, h)$ zeigen. Es gibt ein $x_1 \in [a, b]$ mit der Eigenschaft

$$d_{\max}(f, h) = |f(x_1) - h(x_1)|.$$

Die Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag liefert

$$\begin{aligned} |f(x_1) - h(x_1)| &= |f(x_1) - g(x_1) + g(x_1) - h(x_1)| \\ &\leq |f(x_1) - g(x_1)| + |g(x_1) - h(x_1)|. \end{aligned}$$

Nach Definition gilt $|f(x_1) - g(x_1)| \leq d_{\max}(f, g)$ und $|g(x_1) - h(x_1)| \leq d_{\max}(g, h)$, woraus sich die Behauptung ergibt.