Vorlesung Funktionalanalysis – Fragen zum Prüfungstraining 2

Hagen Knaf, WS 2014/15

Die folgende Liste enthält eine *Auswahl* typischer Prüfungsfragen. Versuchen Sie diese kurz (das ist immer möglich!) und präzise zu beantworten. Bei Fragen nach Beispielen sollten Sie natürlich erklären können, weshalb es sich um ein Beispiel der nachgefragten Art handelt.

Normierte Räume

1. Was ist ein Vektorraum und welche Vektorräume sind für die Funktionalanalysis besonders wichtig?
2. Was ist die Dimension eines Vektorraums? Kennen Sie ein Beispiel eines Vektorraums unendlicher Dimension?
3. Was ist eine Norm? Beispiele?
4. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Normen und Metriken?
5. Wie ist Konvergenz in normierten Räumen definiert und welche Eigenschaften haben konvergente Folgen?
6. Es sei X ein normierter Raum. Ist die Subtraktion $m : X \times X \to X$, $(x, x') \mapsto x - x'$ eine stetige Abbildung?
7. Nennen Sie zwei verschiedene Normen auf dem Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten.
8. Der Abschluss eines Untervektorraums eines Banachraums ist selbst ein Banachraum. Beweisskizze? Weshalb ist dieses Ergebnis wichtig?
9. Es sei X ein normierter Raum. »Kennt man alle konvergenten Folgen (x_k) in X mit Grenzwert 0, so kennt man für jedes $x_0 \in X$ alle konvergenten Folgen (x_k) mit Grenzwert x_0.« Was soll das heißen?
10. Nennen Sie ein Beispiel für einen normierten Raum, der in der angewandten Mathematik wichtig ist?

Topologie normierter Räume

11. »Offene Mengen in einem normierten Raum kann man besser beschreiben, als in einem metrischen Raum.« Was ist damit gemeint?
12. Ist die Teilmenge $\{\alpha_1 e^t + \alpha_2 t : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ des normierten Raums $C([0,1], \mathbb{R})$ offen oder abgeschlossen? Was können Sie sonst über diese Menge sagen?
13. Stimmt die Aussage »Jeder normierte Raum X besitzt einen abgeschlossenen Unterraum Y, $Y \neq 0$, $Y \neq X$«?

14. Besitzt die Folge der Polynome (x^k) im normierten Raum $\mathbb{R}[x]$ mit der Maximumsnorm der Koeffizienten eine konvergente Teilfolge? Was bedeutet die Antwort für die »Einheitskugel« $B[0,1]$ in diesem normierten Raum?

15. Die offenen und die abgeschlossenen Kugeln in einem normierten Raum sind punktsymmetrisch zu ihrem Mittelpunkt. Was ist damit gemeint?

Abbildungsräume

16. Die Menge $\operatorname{Abb}([a,b],\mathbb{R}^n)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wie sind die Rechenoperationen dabei definiert? Wie kann man sich (zumindest viele) der Elemente dieses Vektorraums vorstellen? Welche Dimension besitzt er?

17. Der Vektorraum $C([a,b],\mathbb{R})$ kann sowohl mit der Maximumsnorm, als auch mit der Integralnorm (siehe oben) versehen werden. Begründen Sie kurz den folgenden Sachverhalt (eine Zeile!): Konvergiert die Folge (f_k) bezüglich der Maximumsnorm gegen f, so auch bezüglich der Integralnorm.

18. Ist die Abbildung $E : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $E(f) := \int_a^b tf(t)dt$ stetig? Wo kommt diese Abbildung in der angewandten Mathematik vor?

19. Wird durch die Gleichung $n(f) := \int\limits_a^b f(t)^2 dt$ eine Norm auf $C([a,b],\mathbb{R})$ definiert?

20. Ist die Teilmenge $X \subset B(\mathbb{N},\mathbb{R})$ derjenigen Folgen (x_k), für die es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $x_k = x$ für $k > n$ ein Untervektorraum von $B(\mathbb{N},\mathbb{R})$?

Stetige lineare Abbildungen

21. Welche Beispiele für lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen (unendlicher Dimension) kennen Sie?

22. Welche Stetigkeitskriterien für lineare Abbildungen gibt es? Beweisideen?

23. Was bewirkt der Operator
$T : B([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R})$, $T(f) := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$? Ist T stetig?

24. In der Literatur werden stetige lineare Operatoren häufig als »beschränkt« bezeichnet. Worauf spielt diese Bezeichnung an?

25. Berechnen Sie die Operatornorm von $E : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $E(f) := \int_a^b tf(t)dt$, wobei $C([a,b],\mathbb{R})$ die Maximumsnorm trägt.

26. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$. Der $\mathbb{R}^n$ sei mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen. Berechnen Sie die Operatornorm von T.

27. Welcher Zusammenhang besteht zwischen punktweiser Konvergenz einer Folge (T_k) von Operatoren $T_k \in L(X,Y)$ und der Konvergenz bezüglich der Operatornorm?

28. Welche Beziehung besteht zwischen den Normen $\|T \circ S\|$, $\|T\|$ und $\|S\|$? Beweis?

29. Kennen Sie ein Beispiel eines linearen Operators T mit $\|T^2\| < \|T\|^2$? (Sie kennen eins!)

30. Die Operatoren in der Folge (T_k) in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ seien durch die Matrizen $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Auf $\mathbb{R}^n$ betrachte man die Maximumsnorm. Was bedeutet es für die Matrizen A_k, wenn die Folge (T_k) bezüglich der Operatornorm konvergiert? Grobe Begründung?

Konvergente Reihen

31. Was ist eine konvergente Reihe in einem normierten Raum?

32. Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos(kt)$ in $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ versehen mit der Maximumsnorm konvergent?

33. Es sei $c > 0$. Geben Sie Werte für c an, sodass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c^k t^k$ in $C([0,1],\mathbb{R})$ versehen mit der Integralnorm $\|f\| := \int\limits_0^1 |f| dt$ konvergiert.

34. Was besagt der Satz von Neumann?

35. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$, eine reelle Matrix mit der Eigenschaft $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$. Erklären Sie genau(er), was mit dieser Aussage gemeint ist.

Endlichdimensionale Räume

36. Was bedeutet »norm switching« und weshalb ist es möglich?

37. Man betrachte $C([a,b],\mathbb{R})$ mit der Maximumsnorm. Es sei (p_k) eine in $C([a,b],\mathbb{R})$ konvergente Folge von Polynomen vom Grad $\leq n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist der Grenzwert ein Polynom vom Grad $\leq n$. Weshalb?

38. Was passiert in der vorigen Frage, wenn man die Maximumsnorm durch die Integralnorm ersetzt?

39. Nennen Sie ein Beispiel einer linearen Abbildung $T : X \to Y$ von einem normierten Raum X von endlicher Dimension in einen normierten Raum Y von unendlicher Dimension.

40. Ist $T : X \to Y$ *nicht* stetig, so gibt es eine konvergente Folge (x_k) in X mit $\lim_{k\to\infty} T(x_k) \neq T(\lim_{k\to\infty} x_k)$ und (x_k) ist in *keinem* endlichdimensionalen Unterraum von X enthalten. Grund?

Hauptsätze

41. Was besagt der Satz von Hahn-Banach (Version für normierte Räume)?

42. Ist der normierte Raum X von 0 verschieden, so gibt es in $L(X, \mathbb{R})$ mindestens soviele verschiedene Elemente, wie es reelle Zahlen gibt. Begründung?

43. Man betrachte $C([0,1], \mathbb{R})$ mit der Maximumsnorm und den Untervektorraum $\mathbb{R}[x]$ der Polynome. Welche stetige Fortsetzung auf den gesamten Raum besitzt die Abbildung $T(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) := \sum_{k=0}^{n} a_k$?

44. Was besagt der Satz von der inversen Abbildung? Beweisidee?

45. Weshalb ist der Satz von der inversen Abbildung für Anwendungen der Funktionalanalysis relevant?

46. Es sei $T : X \to Y$ ein bijektiver stetiger linearer Operator zwischen Banachräumen und $x_1 \in X$ sei eine Lösung der Operatorgleichung $T(x) = y_1$, $y_1 \in Y$. Wie verändert sich die Lösung dieser Gleichung, wenn man y_1 durch y_2 mit »kleinem« $\|y_2 - y_1\|$ ersetzt?

47. Welchen Zusammenhang sehen Sie zwischen dem Satz von Neumann und dem Satz von der inversen Abbildung?