

Die folgende Liste enthält eine *Auswahl* typischer Prüfungsfragen. Versuchen Sie diese kurz und präzise zu beantworten. Bei Fragen nach Beispielen sollten Sie natürlich erklären können, weshalb es sich um ein Beispiel der nachgefragten Art handelt.

Metrische Räume, Folgen, Konvergenz

1. Was ist eine konvergente Folge in einem metrischen Raum?
2. Ist die Folge $(1, 0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, 0), (0, \frac{1}{4}), (\frac{1}{5}, 0), \dots$ im \mathbb{R}^2 versehen mit der Maximummetrik d_{\max} konvergent? Wie lautet die Antwort, wenn man anstelle der Maximummetrik die Hammingmetrik h verwendet?
3. Können Sie ein Beispiel für eine konvergente Folge in dem metrischen Raum $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der beschränkten, reellen Zahlenfolgen nennen?
4. Wo kommen konvergente Folgen in der Anwendung der Mathematik vor?
5. Aus welchen Gründen kann eine Folge *nicht* konvergent sein? Kennen Sie jeweils ein Beispiel einer aus diesem Grund nicht konvergenten Folge?
6. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Cauchyfolgen und konvergenten Folgen?
7. Was ist ein vollständiger metrischer Raum?
8. Wie lautet das Cauchy Kriterium und wozu kann man es benutzen?
9. Kennen Sie ein Beispiel für einen vollständigen / unvollständigen metrischen Raum?
10. Ist die Menge $X = \{\text{männlich, weiblich}\} \times \{10, 11, 12, \dots, 100\}$ versehen mit der Hammingmetrik vollständig?

Topologie metrischer Räume

11. Was sind offene / abgeschlossene Mengen in einem metrischen Raum?
12. Ist die Teilmenge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1^2\}$ des \mathbb{R}^2 versehen mit der 1-Metrik d_1 offen?
13. Welche Eigenschaften haben abgeschlossene Mengen?
14. Welche Teilmengen des metrischen Raums $\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\}$ – als Metrik nimmt man die Standardmetrik der reellen Zahlen – sind abgeschlossen?

15. Wozu dienen topologische Begriffe wie »offen« und »abgeschlossen«?
16. Ist die Teilmenge der Nullfolgen offen in dem metrischen Raum der beschränkten Folgen $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?
17. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Abgeschlossenheit und Vollständigkeit?
18. Wie sind »Kugeln« in einem metrischen Raum definiert und weshalb sind sie wichtig?
19. Wie sehen die Kugeln im \mathbb{R}^2 bezüglich der Metrik d_1 aus?
20. Eine bezüglich einer p -Metrik d_p offene Menge im \mathbb{R}^n ist auch offen wenn man die 2-Metrik benutzt. Weshalb?

Stetigkeit und andere Abbildungseigenschaften

21. Welche Methoden zum Prüfen einer Abbildung auf Stetigkeit gibt es?
22. Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := \operatorname{sgn}(x_1 x_2)$, stetig, wenn man auf \mathbb{R}^2 die euklidische Metrik betrachtet? Hierbei ist $\operatorname{sgn}(t) = 1$ für $t > 0$, $\operatorname{sgn}(t) = -1$ für $t < 0$ und $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Wie lautet die Antwort, wenn man statt d_2 die Hammingmetrik h benutzt?
23. Welchen Wert besitzt die Expansion für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := c_1 x_1 + c_2 x_2$, wenn man auf \mathbb{R}^2 die Maximumsnorm benutzt? Ist die Abbildung stetig?
24. Ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) := (x_2, -x_1)$, eine Isometrie, wenn man auf \mathbb{R}^2 eine p -Metrik betrachtet? Was bewirkt diese Abbildung?
25. Wie lautet der Banach'sche Fixpunktsatz und was ist die Grundidee seines Beweises?
26. Was ist aus der Sicht eines angewandten Mathematikers bemerkenswert am Beweis des Banach'schen Fixpunktsatzes?
27. Weshalb besitzt eine kontrahierende Selbstabbildung höchstens einen Fixpunkt?
28. Kennen Sie ein Beispiel einer kontrahierenden Abbildung? Was ist ihr Fixpunkt?
29. Kann eine *nicht* kontrahierende Abbildung einen Fixpunkt besitzen?
30. Weshalb sind kontrahierende Abbildungen stetig?

Produkte metrischer Räume

31. Wie ist das Produkt zweier metrischer Räume definiert?

32. Wozu werden Produkte metrischer Räume eingeführt?
33. Wie lautet das Folgenkriterium für Stetigkeit in einem Punkt für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y_1 \times Y_2$ von einem metrischen Raum in das Produkt zweier metrischer Räume?
34. Ist die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x_1, x_2) := (\sin(x_2), \cos(x_1))$, stetig, wenn man auf \mathbb{R}^2 die Metrik d_1 benutzt?

Kompaktheit

35. Was ist eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums?
36. Ist die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$ kompakt in (\mathbb{R}^2, d_2) ?
37. Ist die Menge der konvergenten Folgen eine kompakte Teilmenge des metrischen Raums $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der beschränkten Folgen?
38. Was haben kompakte Mengen mit Optimierungsproblemen zu tun?

Abbildungsräume

39. Wie ist die gleichmäßige Konvergenz einer Folge (f_k) von Abbildungen $f_k : X \rightarrow Y$ definiert?
40. Welcher Zusammenhang besteht zwischen gleichmäßiger und punktweiser Konvergenz?
41. Welchen punktweisen Grenzwert besitzt die Folge der Funktionen $f_k : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f_k(x) = e^{kx}$? Ist die Folge gleichmäßig konvergent?
42. Ist der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Abbildungen stetig? Gegebenenfalls: Beweisidee? Gegebenenfalls: Gegenbeispiel?
43. Ist die Funktion $F : C([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(-\frac{1}{2})^2 + f(\frac{1}{2})^2$, stetig? Was können Sie über die Menge $F^{-1}(0)$ sagen?
44. Was ist gemeint, wenn man sagt »der Grenzwertoperator ist stetig«?
45. Ist die Menge aller Polynomfunktionen $f(t) = a_n t^n + \dots + a_0$ offen in $C([-1, 1], \mathbb{R})$?
46. Wenn eine Funktion $f \in C([-1, 1], \mathbb{R})$ monoton wachsend ist, und $d_{\max}(f, g) < \epsilon$ für kleines $\epsilon > 0$ gilt, ist dann auch g monoton wachsend?
47. Wenn eine Funktion $f \in C([-1, 1], \mathbb{R})$ nur negative Funktionswerte besitzt, und $d_{\max}(f, g) < \epsilon$ für kleines $\epsilon > 0$ gilt, besitzt dann auch g nur negative Funktionswerte?
48. Wie kann man sich die Metrik d_{\max} in dem Raum $C([0, 1], \mathbb{R}^3)$ veranschaulichen? Haben Sie eine Idee in welchem Bereich der angewandten Mathematik diese Metrik vorkommen könnte?