

VORLESUNG FUNKTIONALANALYSIS  
HAUSAUFGABENÜBERPRÜFUNG 1  
MUSTERLÖSUNG, TEIL 1

HAGEN KNAF, SS 2016

1. Es sei  $R \subset \mathbb{R}^2$  das Rechteck  $[a, b] \times [c, d]$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $c < d$ .

(a) Berechnen Sie die Expansion  $E(T)$  der Abbildung

$$T : C(R, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_R f dx,$$

wobei  $C(R, \mathbb{R})$  mit der Metrik  $d_\infty$  und  $\mathbb{R}$  mit der Standardmetrik versehen seien.

(b) Wird durch die Abbildung

$$D : C(R, \mathbb{R}) \times C(R, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto T(|f - g|)$$

eine Metrik auf  $C(R, \mathbb{R})$  definiert? Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

LÖSUNGEN

1. (a): Nach Definition der Expansion gilt

$$E(T) = \sup\left(\frac{|T(f) - T(g)|}{d_\infty(f, g)} : f, g \in C(R, \mathbb{R}), f \neq g\right). \quad (1)$$

Wir schätzen die Expansion zunächst möglichst scharf nach oben ab:

$$\begin{aligned} |T(f) - T(g)| &= \left| \int_R f dx - \int_R g dx \right| \\ &= \left| \int_R f - g dx \right| \\ &\leq \int_R |f - g| dx \\ &\leq \max(|f(x) - g(x)| : x \in R) \int_R dx \\ &= d_\infty(f, g)(b - a)(d - c), \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Additivität des Integrals, in der dritten und vierten Zeile aus der Analysis bekannte Standardabschätzungen für Integrale und in der fünften Zeile die Definition der Supremums-Metrik genutzt werden, wobei man einsetzt, dass die stetige Funktion  $|f - g|$  auf der kompakten Menge  $R$  ein Maximum besitzt.

Einsetzen in die Formel (1) liefert

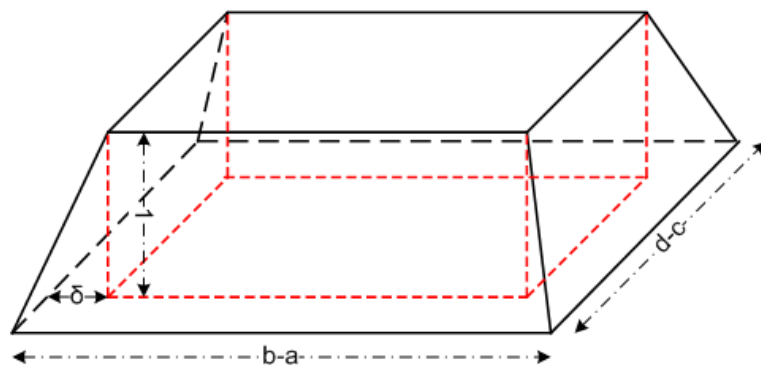
$$E(T) \leq \sup\left(\frac{d_\infty(f, g)(b-a)(d-c)}{d_\infty(f, g)} : f, g \in C(R, \mathbb{R}), f \neq g\right) = (b-a)(d-c).$$

Wir zeigen nun, dass diese Ungleichung in Wahrheit eine Gleichung ist, indem wir zu jedem  $\epsilon \in (0, (b-a)(d-c))$  eine Funktion  $f_\epsilon \in C(R, \mathbb{R})$  angeben, für die  $d_\infty(f_\epsilon, 0) = 1$  und  $|T(f_\epsilon) - T(0)| > (b-a)(d-c) - \epsilon$  gilt (0 bezeichnet die Nullfunktion.).

Da es wesentlich übersichtlicher ist den Graphen dieser Funktion zu beschreiben, als die Funktionsgleichung anzugeben, verfolgen wir diesen Weg: Es sei  $0 < \delta < \min(\frac{b-a}{4}, \frac{d-c}{4})$ . Man betrachtet den Pyramidenstumpf  $P \subset \mathbb{R}^3$  mit Grundfläche  $R$ , Höhe 1 und Deckfläche  $[a + \delta, b - \delta] \times [c + \delta, d - \delta] \times \{1\}$ . Es sei  $p_\delta$  eine Funktion aus  $C(R, \mathbb{R})$ , welche die Oberfläche von  $P$  ohne  $R$  als Graph besitzt. Dann gilt  $d_\infty(p_\delta, 0) = 1$  und

$$\begin{aligned} |T(p_\delta) - T(0)| &\geq ((b - \delta) - (a + \delta))((d - \delta) - (c + \delta)) \\ &= (b - a)(d - c) - 2\delta(b - a + d - c) + 4\delta^2 \end{aligned}$$

– siehe Skizze.



Zu gegebenem  $\epsilon > 0$  kann man also  $\delta > 0$  so wählen, dass

$$|4\delta^2 - 2\delta(b - a + d - c)| < \epsilon.$$

Die Funktion  $f_\epsilon := p_\delta$  erfüllt dann die Anforderungen.

1. (b): Zunächst ist  $D$  wohldefiniert, das heißt  $D(f, g)$  existiert, weil die Differenz und der Betrag stetiger Funktionen wieder stetig sind.

Symmetrie:  $D(f, g) = \int_R |f - g| dx = \int_R |g - f| dx = D(g, f).$

Reflexivität:  $D(f, f) = \int_R 0 dx = 0.$

Gilt andererseits  $h(x_0) \neq 0$  an einer Stelle  $x_0 \in R$  für eine nicht-negative, stetige Funktion  $h : R \rightarrow \mathbb{R}$ , so gibt es eine offene Menge  $U \subseteq R$  mit  $x_0 \in U$  und  $h(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$ . Daher gilt dann  $\int_R h dx \neq 0$ . Folglich ergibt sich aus  $D(f, g) = 0$  die Gleichung  $|f - g| = 0$  und daher  $f = g$ .

Dreiecksungleichung: Es seien  $f, g, h \in C(R, \mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} D(f, h) = \int_R |f - h| dx &= \int_R |f - g + g - h| dx \\ &\leq \int_R |f - g| + |g - h| dx \\ &\leq \int_R |f - g| dx + \int_R |g - h| dx \\ &= D(f, g) + D(g, h). \end{aligned}$$

Insgesamt wurde gezeigt, dass es sich bei  $D$  um eine Metrik handelt.