Vorlesung Funktionalanalysis – Übungsblatt 4

Hagen Knaf, SS 2016

1. Es sei $\mathbb{R}[X]$ die Menge aller Polynome in der Variablen x mit reellen Koeffizienten. Die Addition von Polynomen und die Multiplikation mit reellen Zahlen seien, wie aus der Analysis bekannt, koeffizientenweise definiert.

   Die folgenden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[x]$ zusammen mit der Abbildung

   $$\|\cdot\|_K : \ \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mapsto \max(|a_k| : k \in \{0, \dots, n\})$$

   einen unvollständigen normierten Raum bildet.

   (b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \ p \mapsto \frac{dp}{dx}$$

   im Punkt 0 unstetig ist.

   (c) Beweisen Sie: Die abgeschlossene Kugel $B[0,1]$ in $\mathbb{R}[X]$ ist nicht kompakt.

   (d) Die in (a) definierte Norm kann man wie folgt einsetzen: Es sei $\mathbb{R}[x]_3$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad 3. Es sei $p_0 \in \mathbb{R}[x]_3$ ein Polynom mit drei *verschiedenen* reellen Nullstellen, die alle ungleich 0 sind. Dann gibt es ein $r > 0$ mit der Eigenschaft: Die in $\mathbb{R}[x]_3$ offene Menge $B(p_0, r) \cap \mathbb{R}[x]_3$ enthält ausschließlich Polynome mit drei verschiedenen reellen Nullstellen, die alle ungleich 0 sind.

2. Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ sei die Abbildung

   $$\|\cdot\| : \ \mathrm{C}^2([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \ f(t) \mapsto \|f\|_\infty + \|\frac{df}{dt}\|_\infty$$

   gegeben. Zeigen Sie, dass $(\mathrm{C}^2([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

   Hinweis: Was wissen Sie aus der Analysis über den Grenzwert der Folge $(\frac{df_k}{dt})$ der Ableitungen einer gleichmäßig konvergenten Folge (f_k) stetig differenzierbarer Funktionen?