Hochschule RheinMain SS 2016
Prof. Dr. D. Lehmann

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess oder auch OU-Prozess ν_1, der Cox-Ingersoll-Ross-Prozess oder auch CIR-Prozess (oder auch square root oder SQR-Prozess in der ökonometrischen Literatur) ν_2 und der GARCH-Diffusion-Prozess ν_3 sind gegeben durch die stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} d\nu_{1,t} &= \kappa_1(\bar{\nu}_1 - \nu_{1,t})\,dt \;+\; \beta_1\,dx_t \\ d\nu_{2,t} &= \kappa_2(\bar{\nu}_2 - \nu_{2,t})\,dt \;+\; \beta_2\,\sqrt{\nu_{2,t}}\,dx_t \\ d\nu_{3,t} &= \kappa_3(\bar{\nu}_3 - \nu_{3,t})\,dt \;+\; \beta_3\,\nu_{3,t}\,dx_t \end{aligned}$$

oder etwas kompakter

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^{\gamma}\,dx_t \tag{1}$$

mit $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$. Es sei $E(t) := \mathsf{E}[\nu_t]$ der Erwartungswert von ν_t. Zeigen Sie:

a) $E(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$E'(t) \;=\; \kappa\big(\bar{\nu} - E(t)\big)$$

b) Folgern Sie aus (a): Für den OU-, CIR- und GD-Prozess gilt:

$$E(t) \;=\; \bar{\nu} + (\nu_0 - \bar{\nu})\,e^{-\kappa t}\,. \tag{2}$$

2.Aufgabe: Es sei $t \to \sigma_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine deterministische Funktion und x_t eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie den Erwartungswert

$$\mathsf{E}\big[\,e^{\int_0^T \sigma_t\,dx_t}\,\big]$$

a) mit Hilfe des Theorems 13.5 aus dem Skript.

b) mit Hilfe des Girsanov-Theorems aus dem Kapitel 16.

3.Aufgabe: Für $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$ sei ν_t wie in Aufgabe 1 gegeben durch die Gleichung (1),

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^{\gamma}\,dx_t$$

und $E(t) = \mathsf{E}[\nu_t]$ ist der Erwartungswert von ν_t gegeben durch die Formel (2) aus Aufgabe 1. Definieren wir

$$F(t) \;:=\; \mathsf{E}[\,\nu_t^2\,]\,,$$

dann ist die Varianz von ν_t gegeben durch

$$\mathsf{V}[\nu_t] \;=\; F(t) - E(t)^2\,.$$

a) Zeigen Sie, dass ν_t^2 folgende SDE erfüllt:

$$d(\nu_t^2) \;=\; \big[2\kappa(\bar{\nu}\,\nu_t - \nu_t^2) + \beta^2\nu_t^{2\gamma}\big]\,dt \;+\; 2\beta\,\nu_t^{\gamma+1}\,dx_t \tag{3}$$

b) Folgern Sie mit Hilfe von (3): $F(t)$ erfüllt die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\gamma = 0: &\qquad & F'(t) + 2\kappa F(t) &= 2\kappa\bar{\nu}\,E(t) + \beta^2 \\
\gamma = 1/2: &\qquad & F'(t) + 2\kappa F(t) &= (2\kappa\bar{\nu} + \beta^2)\,E(t) \\
\gamma = 1: &\qquad & F'(t) + (2\kappa - \beta^2)\,F(t) &= 2\kappa\bar{\nu}\,E(t)
\end{aligned}$$

c) Die DGLs aus (b) lassen sich alle in geschlossener Form lösen. Wir betrachten lediglich den Limes $t \to \infty$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\gamma = 0: &\qquad & \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] &= \frac{\beta^2}{2\kappa} \\
\gamma = 1/2: &\qquad & \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] &= \frac{(\beta\sqrt{\bar{\nu}})^2}{2\kappa} \\
\gamma = 1: &\qquad & \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] &= \begin{cases} \dfrac{(\beta\bar{\nu})^2}{2\kappa - \beta^2} & \text{falls } \beta^2 < 2\kappa \\ +\infty & \text{falls } \beta^2 > 2\kappa \end{cases}
\end{aligned}$$