

## 8. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

**1. Aufgabe:** Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess oder auch OU-Prozess  $\nu_1$ , der Cox-Ingersoll-Ross-Prozess oder auch CIR-Prozess (oder auch square root oder SQR-Prozess in der ökonomischen Literatur)  $\nu_2$  und der GARCH-Diffusion-Prozess  $\nu_3$  sind gegeben durch die folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

$$d\nu_{1,t} = \kappa_1(\bar{\nu}_1 - \nu_{1,t}) dt + \beta_1 dx_t \quad (1)$$

$$d\nu_{2,t} = \kappa_2(\bar{\nu}_2 - \nu_{2,t}) dt + \beta_2 \sqrt{\nu_{2,t}} dx_t \quad (2)$$

$$d\nu_{3,t} = \kappa_3(\bar{\nu}_3 - \nu_{3,t}) dt + \beta_3 \nu_{3,t} dx_t \quad (3)$$

mit Modell-Parametern  $\kappa_i, \bar{\nu}_i$  und  $\beta_i$  und  $x_t$  eine Brownsche Bewegung. Simulieren Sie die Prozesse  $\nu_{1,t}, \nu_{2,t}$  und  $\nu_{3,t}$  mit Hilfe einer Excel-Simulation. Wählen Sie dazu etwa folgende Parameter-Werte:

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 3 \quad (4)$$

$$\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = \bar{\nu}_3 = 4\% \quad (5)$$

und:

$$\beta_3 = 2$$

$$\beta_2 := \beta_3 \sqrt{\bar{\nu}} = 0.4 \quad (6)$$

$$\beta_1 := \beta_3 \bar{\nu} = 8\%$$

mit den Start-Werten  $\nu_{i,t=0} = \bar{\nu} = 4\%$ . Variieren Sie dann insbesondere für den CIR-Prozess das  $\beta_2$  und schauen Sie sich die Pfade für die beiden Fälle

$$\kappa_2 \bar{\nu}_2 > \beta_2^2/2 \quad \text{und} \quad \kappa_2 \bar{\nu}_2 < \beta_2^2/2 \quad (7)$$

an. Als Motivation dazu könnten Sie sich schon einmal das Theorem 21.2 aus dem Skript ansehen, insbesondere den Teil (b).

**2. Aufgabe:** Das Heston-Modell ist gegeben durch die Preis-Dynamik

$$dS_t/S_t = \mu_t dt + \sigma_t dx_t \quad (8)$$

mit einer stochastischen instantanen Varianz  $\nu_t := \sigma_t^2$ , die durch einen CIR-Prozess gegeben ist,

$$d\nu_t = \kappa(\bar{\nu} - \nu_t) dt + \beta \sqrt{\nu_t} dy_t \quad (9)$$

mit einer Brownschen Bewegung  $y_t$ , die typischerweise stark negativ korreliert ist zu der Brownschen Bewegung  $x_t$  aus (8),

$$dx_t \cdot dy_t = \rho dt \quad (10)$$

mit einem Korrelationsparameter  $\rho \in (-1, 1)$ . Leiten Sie die SDE für die instantane Volatilität  $\sigma_t = \sqrt{\nu_t}$  her. Das heisst, mit Hilfe des Ito-Lemmas, bestimmen Sie Funktionen  $a = a(\sigma_t, t)$  und  $b = b(\sigma_t, t)$ , so dass

$$d\sigma_t = a(\sigma_t, t) dt + b(\sigma_t, t) dy_t \quad (11)$$

gilt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis (11) mit Hilfe einer Excel-Simulation. (Was ist damit genau gemeint?)