

## 7. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

**1. Aufgabe:** a) Es seien  $S_{1,t}$  und  $S_{2,t}$  zwei Basiswerte mit zeitunabhängiger Black-Scholes Dynamik

$$dS_{i,t}/S_{i,t} = \mu_i dt + \sigma_i dx_{i,t}$$

mit Korrelation

$$dx_{i,t} dx_{j,t} = \rho dt$$

Das Zinsniveau sei gegeben durch den konstanten Parameter  $r$ . Berechnen Sie den  $t = 0$  Preis  $V_0$  der Multi-Asset Option  $H = H(S_{1,T}, S_{2,T})$  mit Auszahlung

$$H(S_{1,T}, S_{2,T}) = \left\{ \frac{S_{1,T}}{S_{1,0}} \frac{S_{2,T}}{S_{2,0}} \right\}^{1/2}$$

b) Wie ändert sich Ihr Resultat aus (a) wenn wir anstatt der zeitunabhängigen Black-Scholes Dynamik eine zeitabhängige Black-Scholes Dynamik

$$dS_{i,t}/S_{i,t} = \mu_{i,t} dt + \sigma_{i,t} dx_{i,t}$$

mit Korrelation

$$dx_{i,t} dx_{j,t} = \rho_t dt$$

zu Grunde legen, mit nach wie vor konstantem jährlichen Zinssatz  $r$  ?

**2. Aufgabe:** Es seien  $\phi_1, \dots, \phi_n$  und  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  unabhängige, standard-normalverteilte Zufallsvariablen, insbesondere also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_i] &= \mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0 \\ \mathbb{E}[\phi_i^2] &= \mathbb{E}[\varepsilon_i^2] = 1 \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{E}[\phi_i \varepsilon_j] = 0$$

für alle  $1 \leq i, j \leq n$ . Weiter seien  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren die Zufallsvariablen  $\psi$  und  $\xi$  durch

$$\begin{aligned} \psi &:= \sum_{i=1}^n a_i \phi_i = \vec{a} \cdot \vec{\phi} \\ \xi &:= \sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i = \vec{b} \cdot \vec{\varepsilon} \end{aligned}$$

Berechnen Sie die folgenden Grössen:

- a) Die Erwartungswerte  $E[\psi]$  und  $E[\xi]$
- b) Die Varianzen  $V[\psi]$  und  $V[\xi]$
- c) Die Kovarianz  $\text{Cov}[\psi, \xi]$
- d) Die Korrelation  $\text{Corr}[\psi, \xi]$
- e) Die Zufallsvariablen  $\psi$  und  $\xi$  sind wieder normalverteilt (nicht notwendig standard-normalverteilt, also nicht notwendig mit Varianz 1). Wenn Sie das jetzt beweisen sollten, welche mathematische Aussage genau müssten Sie dann zeigen?