Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2016

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Für einen Standard At The Money Call mit Laufzeiten T_i werden am Markt folgende implizite Volatilitäten beobachtet:

Laufzeit in Jahren:	0.25	0.5	1	2
implizite Volatilität:	25%	21%	19%	20%

Kalibrieren Sie ein zeitabhängiges Black-Scholes Modell derart, so dass dieses die am Markt beobachteten impliziten Volatilitäten aus der obigen Tabelle reproduziert. Wählen Sie dazu eine stückweise konstante Funktion $t \to \sigma_t$ für die instantane Volatilität im BSTD Modell.

2.Aufgabe: Wir betrachten das zeitunabhängige (BS) und das zeitabhängige (BSTD) Black-Scholes Modell mit Preisprozess

$$\begin{aligned} dS_t/S_t &= \mu\, dt + \sigma\, dx_t && \text{(BS)} \\ dS_t/S_t &= \mu_t\, dt + \sigma_t\, dx_t && \text{(BSTD)} \end{aligned}$$

Dabei sei die instantane Volatilität σ_t des zeitabhängigen Black-Scholes Modells gegeben durch[1]

$$\sigma_t \;:=\; \sigma \times \left(c - \tfrac{t}{T}\right) \tag{1}$$

mit einer Konstanten $c > 1$. Es sei $H = H(S_T)$ die Auszahlungsfunktion einer beliebigen pfad-unabhängigen Option und V_0^{BS} und V_0^{BSTD} sei der $t = 0$ Preis dieser Option im BS bzw. im BSTD Modell. Bestimmen Sie das c in Gleichung (1) so, dass die beiden Modell-Preise übereinstimmen,

$$V_0^{\mathrm{BS}} \stackrel{!}{=} V_0^{\mathrm{BSTD}} .$$

3.Aufgabe: Ein Underlying S_t wurde an das BSTD Model kalibriert und es wurden folgende instantane Volatilitäten gefunden (die Zeiten sind in Jahren angegeben):

$$\sigma_t = \begin{cases} 30\% & \text{fuer } t \in [0, 0.5] \\ 25\% & \text{fuer } t \in (0.5, 1] \\ 20\% & \text{fuer } t \in (1, 2] \end{cases}$$

[1]würde man in der Praxis so nicht haben, da für festes t bei variablem T das σ_t nicht variieren sollte; rein mathematisch kann man das natürlich mal machen

Der jährliche Zinssatz r betrage $r = 3\%$. Berechnen Sie den BSTD-Preis des 'performance-type' Puts mit payoff

$$H(S_T) \quad = \quad \max\{80\% - S_T/S_0, 0\}$$

mit Laufzeit $T = 2$ Jahre.