Hochschule RheinMain SS 2016
Prof. Dr. D. Lehmann

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II
(Probe-Klausur)

1.Aufgabe (10 Punkte): Für einen Standard At The Money Call mit Laufzeiten T_i werden am Markt folgende implizite Volatilitäten beobachtet:

Laufzeit in Jahren:	0.25	0.5	1.0	2.0	4.0
implizite Volatilität:	28%	22%	18%	20%	20%

Kalibrieren Sie ein zeitabhängiges Black-Scholes Modell derart, so dass dieses die am Markt beobachteten impliziten Volatilitäten aus der obigen Tabelle reproduziert. Wählen Sie dazu eine stückweise konstante Funktion $t \to \sigma_t$ für die instantane Volatilität im BSTD Modell.

2.Aufgabe (10 Punkte): Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $\mathsf{P}\big[\max_{t\in[0,T]} x_t \leq 2\big]$ für $T = 4$.

b) $\mathsf{P}\big[x_T \leq 1 \wedge \max_{t\in[0,T]} x_t \leq 2\big]$ für $T = 4$.

c) $\mathsf{P}\big[x_T \leq 1 \wedge \max_{t\in[0,T]} x_t \geq 2\big]$ für $T = 4$.

3.Aufgabe (10 Punkte): Die Preisdynamik eines Underlyings $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sei gegeben durch das zeitunabhängige Black-Scholes Modell $dS_t/S_t = \mu\, dt + \sigma\, dx_t$ mit $\sigma = 30\%$ und $\mu = 5\%$. Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Der aktuelle Preis des Underlyings sei $S_0 = 100$. Betrachten Sie den Down-and-Out Barrier Call mit payoff

$$H_{\text{Down,Out}}(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}) \;=\; \max\{S_T - K, 0\} \times \chi\big(\min_{t\in[0,T]} S_t > B\big)$$

mit Laufzeit $T = 5$ Jahren und Parametern $K = 80$ und $B = 60$. Berechnen Sie den $t = 0$ Preis V_0 dieser Option.

4.Aufgabe (10 Punkte): Die instantane Volatilität σ_t eines Stoch-Vol-Modells sei gegeben durch die SDE

$$d\sigma_t \;=\; \kappa(\bar{\sigma} - \sigma_t)\, dt \;+\; \beta\, \sigma_t^{\alpha}\, dx_t$$

mit Modell-Parametern $\kappa, \bar{\sigma} \geq 0$ und einer Konstanten $\alpha \geq 0$.

a) Berechnen Sie die SDE für die instantane Varianz $\nu_t := \sigma_t^2$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathsf{E}[\sigma_t]$.

5.Aufgabe (10 Punkte): Ein Underlying S_t wurde an das BSTD Model kalibriert und es wurden folgende instantane Volatilitäten gefunden (die Zeiten sind in Jahren angegeben):

$$\sigma_t \;=\; \begin{cases} 40\% & \text{fuer } \; t \in [0, 0.5] \\ 32\% & \text{fuer } \; t \in (0.5, 1] \\ 28\% & \text{fuer } \; t \in (1, 2] \\ 25\% & \text{fuer } \; t \in (2, 4] \end{cases}$$

Der jährliche Zinssatz r betrage $r = 2\%$. Berechnen Sie den BSTD-Preis des 'performance-type' Calls mit payoff

$$H(S_T) \;=\; \max\{S_T/S_0 \;-\; 120\%\,,\, 0\}$$

mit Laufzeit $T = 4$ Jahre.

6.Aufgabe (10 Punkte): Es seien ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 und ϕ_4 unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Konstruieren Sie aus diesen unabhängigen Zufallszahlen korrelierte, standard-normalverteilte Zufallszahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_4 mit folgenden Korrelationen:

$$\begin{aligned} \mathsf{Corr}[\xi_1, \xi_2] &= 80\% \\ \mathsf{Corr}[\xi_3, \xi_4] &= 60\% \end{aligned}$$

und $\mathsf{Corr}[\xi_i, \xi_j] \;=\; 0$ für alle übrigen Korrelations-Paare $(i, j) \neq (1, 2), (3, 4)$.