Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2016

1. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Gegeben sei eine Digital-Option mit Laufzeit $T > 0$ und Auszahlung

$$H(S_T) \;=\; \begin{cases} 100 & \text{falls } S_T \geq K \\ 0 & \text{falls } S_T < K \end{cases}$$

wobei der 'Strike' K eine positive Konstante ist. Die Preisdynamik von $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sei gegeben durch das Black-Scholes Modell $dS/S = \mu\, dt + \sigma\, dx_t$. Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$.

a) Berechnen Sie den Preis V_t dieser Option zur Zeit $0 \leq t < T$ im Black-Scholes Modell.
Hinweis: Im Ergebnis sollte die Funktion $N(d) = \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ vorkommen, aber keine weiteren Integrale.

b) Berechnen Sie die replizierende Strategie für diese Option, d.h., berechnen Sie das $\delta = \delta(S_t, t)$ für diese Option.

c) Die Volatilität sei $\sigma = 20\%$ und der Strike sei $K = 100$. Skizzieren Sie den Preis und das delta zur Zeit $t = 0$ als Funktion von $S_0 \in (0, 200)$ für die Laufzeiten $T = 1$ und $T = 0.1$. Das könnte man etwa mit Excel machen, mit T als variablen Input-Parameter.

2.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{0\leq t\leq T}$ eine Brownsche Bewegung auf dem Intervall $[0, T]$ und $0 < s < T$ sei eine vorgegebene Zeit. Im folgenden Erwartungswert, dem sogenannten bedingen Erwartungswert, wird die gesamte Pfad-Historie bis zur Zeit s als bekannt, schon realisiert, als nicht mehr stochastisch angesehen:

$$\mathsf{E}_W\big[\, f(\{x_t\}_{0\leq t\leq T}) \,|\, x_s \,\big] \;:=\; \int f(\{x_t\})\, dW(\{x_t\}_{s<t\leq T}) \tag{1}$$

Dabei ist $dW(\{x_t\}_{s<t\leq T})$ das Wiener-Maß. Eine etwas genauere, aber auch etwas aufwendigere, Notation für den bedingten Erwartungswert (1) wäre (die rechte Seite ist gleich geblieben):

$$\mathsf{E}_W\big[\, f(\{x_t\}_{0\leq t\leq T}) \,|\, \{x_u\}_{0\leq u\leq s} \,\big] \;:=\; \int f(\{x_t\})\, dW(\{x_t\}_{s<t\leq T}) \tag{2}$$

da die Notation (2) deutlicher macht, dass nicht nur die Brownsche Bewegung x_s zur Zeit s schon bekannt ist, sondern eben der gesamte Pfad $\{x_u\}_{0\leq u\leq s}$ der Brownschen Bewegung bis zur Zeit s sich schon realisiert hat, nicht mehr stochastisch ist.

..*bitte wenden*

a) Es sei $t > s$. Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert

$$\mathsf{E}_W\left[\, x_t^3 \,|\, x_s \,\right] .$$

Das Ergebnis ist also nicht nur eine reine Zahl oder etwas mit t, sondern es kommt auch das x_s im Ergebnis vor.

b) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{R}$ so, daß der Prozess

$$M_t \;:=\; x_t^3 \,-\, a\,t\,x_t$$

ein Martingal bezüglich des Wiener-Maßes ist. Das heisst, der Prozess $\{M_t\}_{0\leq t\leq T}$ soll folgende Eigenschaft haben:

$$\mathsf{E}_W\left[\, M_t \,|\, x_s \,\right] \;=\; M_s \qquad \forall\, t > s\,.$$

3.Aufgabe: Zeigen Sie, dass folgende Prozesse $\{M_t\}_{t\geq 0}$ Martingale bezüglich des Standard-Wiener-Maßes sind:

a) $M_t \;:=\; x_t^2 - t$

b) $M_t \;:=\; e^{\sigma x_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$

4.Aufgabe: Es sei

$$S_t \;=\; S_0\, e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma x_t}$$

ein Preisprozess mit Black-Scholes Dynamik $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dx_t$ und

$$s_t \;:=\; e^{-rt}S_t \;=\; S_0\, e^{(\mu-r-\sigma^2/2)t+\sigma x_t}$$

sei der diskontierte Preisprozess. Weiter bezeichne W das Standard-Wiener-Maß und $\tilde{W}$ ist das Risiko-neutrale Pricing Maß aus Kapitel 9. Berechnen Sie für $t > s \geq 0$:

a) $\mathsf{E}_W\left[\, S_t \,|\, x_s \,\right]$

b) $\mathsf{E}_W\left[\, s_t \,|\, x_s \,\right]$

c) $\mathsf{E}_{\tilde{W}}\left[\, S_t \,|\, x_s \,\right]$

d) $\mathsf{E}_{\tilde{W}}\left[\, s_t \,|\, x_s \,\right]$

Welche Prozesse sind Martingale bezüglich welcher Maße? Sie können sämtliche Resultate aus dem Kapitel 9 verwenden, ebenfalls die Aussage von Aufgabe 3b.