Mathematische Strukturen – Lösungen zum Übungsblatt 7

Hagen Knaf, SS 2016

1. Eine Teilmenge Y eines metrischen Raums (X, d) heißt beschränkt, falls es eine abgeschlossene Kugel $B[x_0, r]$ mit der Eigenschaft $Y \subseteq B[x_0, r]$ gibt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über beschränkte Mengen:

   (a) Sind $Y_1, \ldots, Y_r$ beschränkte Teilmengen von X, so sind auch die Teilmengen $Y_1 \cap \ldots \cap Y_r$ und $Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ beschränkt.

   (b) Das Innere Y° einer beschränkten Menge ist beschränkt.

   (c) Jeder metrische Raum ist nicht beschränkt.

   (d) Der Abschluss $\overline{Y}$ einer beschränkten Menge ist beschränkt.

   (e) Die Teilmenge Y ist genau dann beschränkt, wenn ihr Komplement $X \setminus Y$ nicht beschränkt ist.

   Bei dieser Aufgabe kommt es darauf an, die Beweise bzw. Begründungen präzise und knapp zu Papier zu bringen.

   Lösungen:

   (a) Nach Voraussetzung gibt es Kugeln $B[x_i, s_i]$ mit der Eigenschaft $Y_i \subseteq B[x_i, s_i]$, $i = 1, \ldots, r$.

   Es gilt $Y_1 \cap \ldots \cap Y_r \subseteq Y_1 \subseteq B[x_1, s_1]$, folglich ist $Y_1 \cap \ldots \cap Y_r$ beschränkt.

   Es sei
   $$s := \max(d(x_1, x_i) + s_i : i = 1, \ldots, r).$$
   Dann gilt für jedes $y \in B[x_i, s_i]$ nach der Dreiecksungleichung:
   $$d(x_1, y) \le d(x_1, x_i) + d(x_i, y) \le d(x_1, x_i) + s_i \le s,$$
   das heißt $B[x_i, s_i] \subseteq B[x_1, s]$. Es folgt:
   $$Y_1 \cup \ldots \cup Y_r \subseteq B[x_1, s_1] \cup \ldots \cup B[x_r, s_r] \subseteq B[x_1, s],$$
   womit $Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ beschränkt ist.

   (b) Die Aussage ist wahr: Nach Voraussetzung gilt $Y \subseteq B[x_0, r]$ und andererseits gilt stets $Y^\circ \subseteq Y$.

(c) Diese Aussage ist falsch. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist jede Teilmenge $Y \subseteq X$ mit der Einschränkung der Metrik d auf Y ein metrischer Raum. Insbesondere kann man für Y eine endliche Teilmenge von X wählen. Jede endliche Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) ist aber beschränkt.

(d) Die Aussage ist war: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine abgeschlossene Kugel $B[x_0, r]$ abgeschlossen ist, das heißt es gilt $\overline{B[x_0, r]} = B[x_0, r]$. Weiter wurde gezeigt, dass aus $A \subseteq B$ stets $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ folgt. Also folgt aus $Y \subseteq B[x_0, r]$ die Inklusion $\overline{Y} \subseteq \overline{B[x_0, r]} = B[x_0, r]$.

(e) Die Aussage ist falsch: In einem metrischen Raum (X, d) mit endlich vielen Elementen ist jede Teilmenge beschränkt.

2. Skizzieren Sie die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:

$$Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(\frac{1}{n}, y) : y \in [0, 1)\}.$$

Bestimmen Sie das Innere Y°, den Rand $\mathrm{Rd}(Y)$ und den Abschluss $\overline{Y}$ bezüglich der euklidischen Metrik d_2 auf $\mathbb{R}^2$, und bezüglich der Hammingmetrik h auf $\mathbb{R}^2$.

Ein Teil der Menge Y, nämlich die Teilmenge

$$Y_5 := \bigcup_{n=1}^{5} \{(\frac{1}{n}, y) : y \in [0, 1)\}.$$

ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Punkte am oberen Ende der vertikalen Linien gehören jeweils nicht zu Y.

Metrik d_2: Jede Kugel $B(y, r)$, $y \in Y$, enthält Punkte $x \notin Y$, folglich ist $Y^\circ = \emptyset$. Jede Kugel der Form

$$B((\frac{1}{n}, 1), r)$$

enthält Punkte aus Y, folglich gilt $(\frac{1}{n}, 1) \in \overline{Y}$. Da die vertikalen Linien der y-Achse beliebig nahe kommen, enthält auch jede Kugel der Form

$$B((0, y), r), y \in [0, 1],$$

Punkte aus Y. Es ergibt sich

$$\overline{Y} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(\frac{1}{n}, y) : y \in [0, 1]\} \cup \{(0, y) : y \in [0, 1]\}.$$

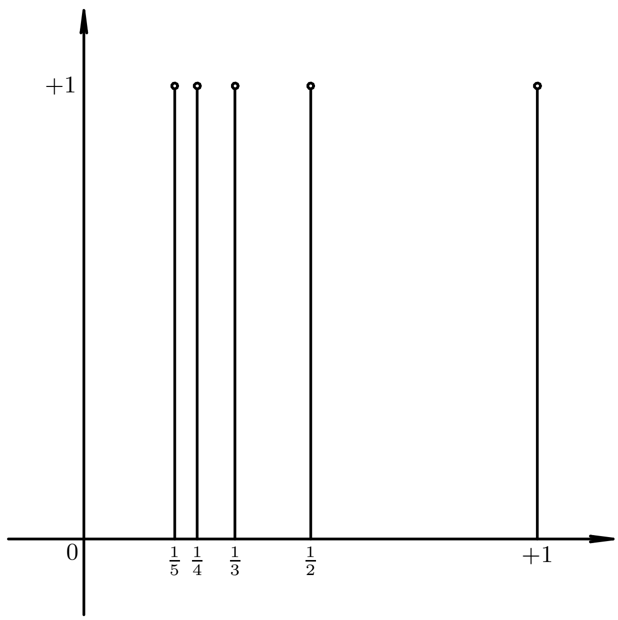

Abbildung 1: Skizze von Y

Es gilt $\operatorname{Rd}(Y) = \overline{Y} \setminus Y^\circ = \overline{Y}$ – siehe Satz aus der Vorlesung über den Zusammenhang von Innerem, Abschluss und Rand.

Metrik h: In der Hammingmetrik gilt $B(x, r) = \{x\}$ für jedes $r < 1$, folglich sind alle Mengen der Form $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}^2$, offen. Da Vereinigungen offener Mengen offen sind, und für jede Menge A

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

gilt, ist *jede* Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ offen.

Da das Innere Y° die bezüglich $\subseteq$ größte in Y enthaltene, offene Menge ist (siehe Vorlesung), folgt also $Y = Y^\circ$.

Da auch $X \setminus Y$ offen ist, ist Y abgeschlossen und daher $Y = \overline{Y}$.

Schließlich folgt $\operatorname{Rd}(Y) = \emptyset$.

3. In einem metrischen Raum (X, d) wird der Abstand eines Punktes $x \in X$ von einer Teilmenge $A \subseteq X$ durch

$$D(x, A) := \inf(d(x, a) : a \in A)$$

definiert, wobei inf das Infimum einer Menge reeller Zahlen bezeichnet. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) $x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; D(x, A) = 0.$

(b) $x \in A^\circ \;\Leftrightarrow\; D(x, X \setminus A) > 0.$

LÖSUNGEN:

(a) $\Rightarrow$: Ist $x \in \overline{A}$, so gilt $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ für jedes $r > 0$. Folglich gibt es zu jedem $r > 0$ ein $a \in A$ mit $d(x, a) < r$, womit $D(x, A) = 0$ gilt.

$\Leftarrow$: Die logischen Schritte des Beweises von $\Rightarrow$ lassen sich alle umnkehren.

(b) $\Rightarrow$: Zu $x \in A^\circ$ gibt es eine Kugel $B(x, r) \subseteq A$. Folglich ist $d(x, y) \geq r$ für jedes $y \in X \setminus A$. Dann ist aber auch $D(x, X \setminus A) \geq r$.

$\Leftarrow$: Es sei $r < D(x, X \setminus A)$. Dann gilt nach Definition von D: $B(x, r) \cap X \setminus A = \emptyset$, also $B(x, r) \subseteq A$ und damit $x \in A^\circ$.