

MATHEMATISCHE STRUKTUREN – ÜBUNGSBLATT 3

HAGEN KNAF, SS 2016

1. Eine Funktion $f \in \text{Fun}([a, b], \mathbb{R})$ heißt »gerade«, falls ihr Graph achsensymmetrisch zur Parallelen zur Hochachse durch den Punkt $(\frac{a+b}{2}, 0)$ ist.

Eine Funktion $f \in \text{Fun}([a, b], \mathbb{R})$ heißt »ungerade«, falls ihr Graph punktsymmetrisch zum Punkt $(\frac{a+b}{2}, 0)$ ist.

- (a) Formulieren Sie die Eigenschaften gerade zu sein und ungerade zu sein mit Hilfe von Gleichungen für die Funktionswerte.

Lösung:

$$\forall x \in [a, b] \quad f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) = f\left(\frac{a+b}{2} + x\right).$$

$$\forall x \in [a, b] \quad f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) = -f\left(\frac{a+b}{2} + x\right).$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Menge $G \subset \text{Fun}([a, b], \mathbb{R})$ aller geraden Funktionen und die Menge $U \subset \text{Fun}([a, b], \mathbb{R})$ aller ungeraden Funktionen Untergruppen von $(\text{Fun}([a, b], \mathbb{R}), +)$ sind.

Lösung: In beiden Fällen ist zu zeigen, dass $+$ eine innere Verknüpfung der Menge ist, sowie dass die Nullfunktion und die Inversen zu jeder Funktion in der Menge liegen.

Für $f, g \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} (f+g)\left(\frac{a+b}{2} - x\right) &= f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) + g\left(\frac{a+b}{2} - x\right) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + x\right) \\ &= (f+g)\left(\frac{a+b}{2} + x\right). \end{aligned}$$

Für $f, g \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} (f+g)\left(\frac{a+b}{2} - x\right) &= f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) + g\left(\frac{a+b}{2} - x\right) \\ &= -f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) + (-g\left(\frac{a+b}{2} + x\right)) \\ &= -(f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + x\right)) \\ &= -(f+g)\left(\frac{a+b}{2} + x\right). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $0 \in G$ und $0 \in U$.

Für $f \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} (-f)\left(\frac{a+b}{2} - x\right) &= -f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) \\ &= -f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) \\ &= (-f)\left(\frac{a+b}{2} + x\right). \end{aligned}$$

Für $f \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} (-f)\left(\frac{a+b}{2} - x\right) &= -f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) \\ &= -(-f)\left(\frac{a+b}{2} + x\right) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2} + x\right). \end{aligned}$$

- (c) Beweisen Sie, dass sich jede Funktion $f \in \text{Fun}([a, b], \mathbb{R})$ als punktweise Summe $g + u$ einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u schreiben lässt. Sind g und u durch f eindeutig festgelegt?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $[a, b] = [-c, c]$ eines symmetrisch um die 0 liegenden Intervalls und versuchen Sie auf einfache Weise aus f eine gerade Funktion zu erhalten.

Lösung: Für jedes $f \in \text{Fun}([-c, c], \mathbb{R})$ ist

$$g(t) := \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

eine gerade Funktion und

$$u(t) := \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

eine ungerade Funktion.

Es gilt $f = g + u$.

Die Funktionen g und u sind durch f eindeutig bestimmt: Sind nämlich h und v eine gerade und eine ungerade Funktion mit $f = h + v$, so folgt $g + u = h + v$ also $g - h = v - u$. Da G und U Gruppen sind, ist dann $g - h$ eine Funktion, die sowohl gerade, als auch ungerade ist, für die also $f(x) = -f(x)$ für alle $x \in [-c, c]$ gilt. Dies ist nur für die Nullfunktion erfüllt: $g = h$ und $u = v$.

Der allgemeine Fall lässt sich durch Verschieben um $\frac{a+b}{2}$ auf den eben diskutierten zurückführen.

2. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Elemente des in der Vorlesung eingeführten Monoids $(\text{Abb}([0, 1]), \circ)$ ein Inverses

besitzen, und bestimmen Sie dieses gegebenenfalls: $f_1(t) = t - t^2$, $f_2(t) = e^{-t^2}$, $f_3(t) = 16(t - \frac{1}{2})^5 + \frac{1}{2}$, $f_4(t) = \sqrt{1 - t^2}$.

Vorüberlegung: Die folgenden Fakten sollten Studierenden des 2. Semesters klar sein. Falls Sie feststellen, dass dem nicht so ist, ist es wichtig die entsprechenden Teile im Einführungskurs noch einmal durchzusehen.

Eine Abbildung $f \in \text{Abb}([0, 1])$ ist nach Definition invertierbar, falls es eine Abbildung $g \in \text{Abb}([0, 1])$ gibt, für welche $f \circ g = g \circ f = \text{id}$ gilt, wobei id die Identität ist.

Aus $g \circ f = \text{id}$ folgt, dass ein invertierbares f injektiv sein muss: Sind $t_1, t_2 \in [0, 1]$ mit $f(t_1) = f(t_2)$, so folgt

$$t_1 = g(f(t_1)) = g(f(t_2)) = t_2.$$

Aus $f \circ g = \text{id}$ folgt, dass ein invertierbares f surjektiv sein muss: Ist $s \in [0, 1]$, so folgt

$$s = f(g(s)),$$

also ist $g(s)$ ein Urbild von s .

Eine injektive und surjektive Abbildung nennt man bijektiv. Jede bijektive Abbildung besitzt eine Umkehrabbildung; ein bijektives $f \in (\text{Abb}([0, 1]))$ ist also invertierbar, denn das Inverse ist gerade die Umkehrabbildung.

Lösung der Aufgabe:

- Die Abbildung f_1 besitzt kein Inverses, denn $f_1(0) = f_1(1) = 0$, womit f_1 nicht injektiv ist.
- Die Abbildung f_2 besitzt kein Inverses, denn wie aus der Analysisvorlesung bekannt ist, ist die Funktion $f(t) = e^{-t}$ und damit auch die Funktion f_2 monoton fallend. Ihr kleinster Funktionswert auf dem Intervall $[0, 1]$ ist also $e^{-1} > 0$. Damit wird der Funktionswert 0 nicht angenommen; f_2 ist also nicht surjektiv.
- Die Abbildung f_3 besitzt ein Inverses: Aus der Analysisvorlesung ist bekannt, dass $f(t) = t^5$ eine streng monoton wachsende, surjektive Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Zu jedem $s \in \mathbb{R}$ gibt es also genau ein $t \in \mathbb{R}$ mit $t^5 = s$; man nennt t auch die (reelle) fünfte Wurzel aus s und schreibt $t = \sqrt[5]{s}$. Die Funktion $g(t) = \sqrt[5]{t}$ ist die Umkehrfunktion von f .

Mit f besitzt auch f_3 eine Umkehrabbildung, die man wie folgt bestimmen kann: Ist g diese Umkehrabbildung, so gilt insbesondere $f_3 \circ g = \text{id}$, also

$$16(g(s) - \frac{1}{2})^5 + \frac{1}{2} = s$$

für alle $s \in [0, 1]$. Es folgt:

$$g(s) = \sqrt[5]{\frac{1}{16}(s - \frac{1}{2})} + \frac{1}{2}.$$

- Die Funktion f_4 besitzt ein Inverses: Dies kann man rein theoretisch begründen. Aus der Analysis ist bekannt, dass die Funktion f_4 stetig ist. Es gilt $f_4(0) = 1$ und $f_4(1) = 0$. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt f_4 dann auch jeden Wert zwischen 0 und 1 an, ist also surjektiv. Da die Funktion $f(t) = 1 - t^2$ streng monoton fallend, und die Wurzelfunktion streng monoton wachsend ist, ist f_4 streng monoton fallend, also injektiv. Folglich ist f_4 bijektiv. Wer die Inverse konkret sehen möchte – sie lässt sich leicht ausrechnen: Es ist f_4 selbst.

3. Bestimmen Sie Lösungen $x(t), y(t) \in \text{Fun}([0, 1], \mathbb{R})$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} t \cdot e^{2t} \cdot x(t) + (t^3 - 1) \cdot y(t) &= e^{2t} \\ e^t \cdot x(t) + t^2 \cdot e^{-t} \cdot y(t) &= 0 \end{aligned}$$

Die auftretenden Operationen $+$ und $\cdot$ sind (klarerweise) die punktweise Addition und Multiplikation von Funktionen.

Gibt es mehr als eine Lösung?

Lösung: Die Funktion e^t ist in $\text{Fun}([0, 1], \mathbb{R})$ invertierbar, daher kann man die zweite Gleichung nach $x(t)$ auflösen:

$$x(t) = -(e^t)^{-1} \cdot t^2 \cdot e^{-t} \cdot y(t) = -t^2 \cdot e^{-2t} \cdot y(t).$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$t \cdot e^{2t} \cdot (-t^2 \cdot e^{-2t} \cdot y(t)) + (t^3 - 1) \cdot y(t) = e^{2t},$$

also

$$y(t) = e^{2t}$$

und damit

$$x(t) = -t^2.$$

Dies ist die einzige Lösung des Gleichungssystems, da die durchgeführten Umformungen für jede Lösung möglich sind.