

MATHEMATISCHE STRUKTUREN – ÜBUNGSBLATT 2

HAGEN KNAF, SS 2016

1. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass man jedes Element der Diedergruppe D_8 des regelmäßigen Achtecks in der Form $s^k \circ d^\ell$, $k \in \{0, 1\}$, $\ell \in \{0, 1, \dots, 7\}$ schreiben kann, wobei d die Drehung um den Mittelpunkt des Achtecks um den Winkel $\frac{2\pi}{8}$ und s eine Spiegelung an einer Symmetrieachse ist. Berechnen Sie diese Standardform für das Gruppenelement

$$d^5 \circ s \circ d^2 \circ s \circ d.$$

Geben Sie alle Elemente $g \in D_8$ an für die $g^4 = n$ und $g^k \neq n$, $k \in \{1, 2, 3\}$ gilt.

Lösung: Wie in der Vorlesung gezeigt gilt die Gleichung $d \circ s = s \circ d^7$. Durch mehrfache Anwendung dieser Gleichung, sowie $s^2 = n$ und $d^8 = n$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} d^5 \circ s \circ d^2 \circ s \circ d &= s \circ d^{35} \circ d^2 \circ s \circ d \\ &= s \circ d^{37} \circ s \circ d \\ &= s \circ d^5 \circ s \circ d \\ &= s \circ s \circ d^{35} \circ d \\ &= s^2 \circ d^{36} \\ &= d^4. \end{aligned}$$

Die gesuchten Elemente g können keine Spiegelungen sein. Die Drehungen mit der Eigenschaft $g^4 = n$ können nur Drehungen um Vielfache von $\frac{2\pi}{4}$ sein, wobei die Drehung um 0 und um π nicht in Frage kommt. Damit bleiben die Drehungen d^2 und d^6 .

2. Die Menge $\mathbb{Q}^{>0}$ der positiven Brüche bildet mit der Multiplikation als innerer Verknüpfung eine Gruppe. Beweisen Sie, dass diese Gruppe nicht zyklisch ist.

Lösung: Man führt einen Widerspruchsbeweis und nimmt an, dass $(\mathbb{Q}^{>0}, \cdot)$ zyklisch ist, das heißt man nimmt die Existenz eines Bruchs $q > 0$ mit der Eigenschaft

$$\mathbb{Q}^{>0} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

an. Es gibt teilerfremde natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $q = \frac{a}{b}$. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, gibt es eine Primzahl p , die weder a noch b teilt. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorisation kann es kein $k \in \mathbb{Z}$ mit $q^k = p$ geben.

3. Bestimmen Sie alle endlichen Teilmengen $G \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, die mit der Multiplikation reeller Zahlen eine Gruppe bilden.

Lösung: Es sei G eine Teilmenge der gesuchten Art und $g \in G$. Da G endlich und die Zahl 1 das neutrale Element von G ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = 1$. Die Polynomgleichung $X^n - 1 = 0$ besitzt in $\mathbb{R}$ nur die Lösungen 1 und -1 . Es folgt $G = \{1\}$ oder $G = \{-1, 1\}$.