

MATHEMATISCHE STRUKTUREN – ÜBUNGSBLATT 1

HAGEN KNAF, SS 2016

1. Erstellen Sie die Verknüpfungstafel einer Gruppe G mit vier Elementen und folgender weiteren Eigenschaft: in G gibt es zwei Elemente g, h mit $g^2 = h^2 = 1$, wobei $g \neq 1$ und $h \neq 1$ ist.

Lösung: Die Gruppe G besteht aus vier Elementen von denen drei schon benannt sind: das neutrale Element 1, sowie die Elemente g und h . Das vierte Element werde mit i bezeichnet. Dann sind die Elemente $g \cdot h, g \cdot i, h \cdot g, h \cdot i, i \cdot g, i \cdot h, i^2$ so zu bestimmen, dass die Gruppenaxiome gelten.

Da 1, g und h jeweils ihre eigenen Inverse sind, und da Inverse eindeutig bestimmt sind, kann das Inverse zu i weder 1 noch g noch h sein. Folglich muss auch i sein eigenes Inverses sein: $i^2 = 1$.

Aus der Gleichung $g \cdot h = g$ folgt durch Verknüpfen mit g von links die Gleichung $h = 1$. Folglich gilt $g \cdot h \neq g$. Analog beweist man $g \cdot h \neq h$. Wegen der Eindeutigkeit des Inversen ist auch $g \cdot h \neq 1$. Damit muss $g \cdot h = i$ gelten.

Durch Verknüpfen mit g von links folgt aus $g \cdot h = i$ die Identität $h = g \cdot i$. Verknüpfen mit h von rechts liefert dagegen $g = i \cdot h$. Letzteres kann man auch durch die Sudoku-Eigenschaft der Verknüpfungstafel begründen, da in der Zeile zum Element g jedes Gruppenelement vorkommen muss.

Die Sudoku-Eigenschaft der Spalte zu i liefert $h \cdot i = g$.

Die Sudoku-Eigenschaft der Zeile zu h liefert dann $h \cdot g = i$.

Die Sudoku-Eigenschaft der Spalten zu g und zu h liefert schließlich $i \cdot g = h$ und $i \cdot h = g$.

Die Axiome einer Gruppe sind nun bis auf das Assoziativgesetz offensichtlich(!) erfüllt. Weiter erkennt man, dass die definierte Verknüpfung kommutativ ist. Benutzt man diese Eigenschaft, so lässt sich das Assoziativgesetz mit wenigen Gleichungen nachrechnen/bestätigen. Zum Beispiel muss man wegen der Kommutativität nicht die Gleichungen $g \cdot (h \cdot g) = (g \cdot h) \cdot g$ nachrechnen.

2. Finden Sie eine Gruppe mit vier Elementen, die *nicht* die Eigenschaft aus Aufgabe 1 besitzt.

Lösung: Man kann entweder eine konkrete solche Gruppe angeben, oder eine abstrakte Gruppe mit dieser Eigenschaft konstruieren.

Konkrete Gruppe: Man betrachte die Menge $G : \{-1, 1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung. Durch Erstellen der Verknüpfungstafel erkennt man, dass die Multiplikation eine innere Verknüpfung auf dieser Menge ist, sowie die Existenz eines neutralen Elements und von Inversen. Da die Multiplikation komplexer Zahlen assoziativ ist, wie man in der Analysis lernt, liegt also eine Gruppe vor. In dieser gilt $i^2 = -1$, womit G nicht die Eigenschaft der Gruppe aus Aufgabe 1 besitzt.

Abstrakte Gruppe: Man nimmt an G sei eine Gruppe, die nicht die Eigenschaft der Gruppe aus Aufgabe 1 besitzt. Dann gibt es ein $g \in G$ mit $g^2 \neq 1$. Es gilt dann $g^2 \neq g$, da man andernfalls $g = 1$ erhalten würde. Damit hat man die drei Gruppenelemente $1, g, g^2$ in G . Es sei h das vierte Element. Das Element $g \cdot h$ kann weder gleich g noch gleich h sein. Die Gleichung $g \cdot h = g^2$ liefert $h = g$, ebenfalls unmöglich. Folglich ist $g \cdot h = 1$. Hieraus folgt $g^3 \neq 1$, da andernfalls g^2 das Inverse zu g und damit $h = g^2$ wäre. Es folgt $g^4 = 1$ und damit $h = g^3$.

Mit Hilfe der Potenzgesetze aus der Vorlesung und der Gleichung $g^4 = 1$ lässt sich die Verknüpfungstafel der als existent angenommenen Gruppe G erstellen und nachweisen, dass es sich wirklich um eine Gruppe handelt.

3. Betrachten Sie die Menge H aller 2×2 -Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Ist die Menge H zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort im Detail.

Lösung: Die Menge H versehen mit der Matrixmultiplikation ist eine abelsche Gruppe. Um dies einzusehen muss man zunächst nachweisen, dass die Matrixmultiplikation eine innere Verknüpfung von H ist: Es

gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5(a+b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

womit das Produkt zweier Matrizen aus H selbst in H liegt. Dabei benutzt man (wo?), dass die Addition ganzer Zahlen kommutativ ist.

Die Matrixmultiplikation ist assoziativ, wie aus der linearen Algebra bekannt ist. Alternativ kann man das Assoziativgesetz auch mit Hilfe der Gleichung (1) beweisen:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 5c + (5b + 5a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 5b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 & (5c + 5b) + 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bei diesem Vorgehen erkennt man unmittelbar, dass das Assoziativgesetz in H aus dem Assoziativgesetz der Addition ganzer Zahlen folgt.

Die Matrixmultiplikation für Matrizen aus H ist kommutativ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5b + 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5a + 5b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich liefert die Gleichung (1) auch die Existenz von inversen Elementen, nämlich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$