HAUSAUFGABENÜBERPRÜFUNG 1
ZU
MATHEMATISCHE STRUKTUREN
HAGEN KNAF, SS 2016
LÖSUNGEN

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Menge H aller Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Form

$$f(x) = Ax + b, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b \in \mathbb{R}^2.$$

- (1) Zeigen Sie, dass H zusammen mit der Verkettung $\circ$ von Abbildungen als innerer Verknüpfung ein Monoid bildet. Ist es kommutativ?

LÖSUNG: Es ist zunächst zu zeigen, dass für beliebige $f, g \in H$ auch $g \circ f \in H$ gilt. Ist $f(x) = Ax + b$ und $g(x) = Bx + d$, so folgt unter Verwendung der Rechenregeln für die Matrixmultiplikation:

$$(g \circ f)(x) = B(Ax + b) + d = BAx + Bb + d = (BA)x + (Bb + d),$$

womit $g \circ f$ die angestrebte Form besitzt, also in H liegt.

Das Assoziativgesetz gilt in $(H, \circ)$, da es für die Verkettung beliebiger Abbildungen gilt.

Die identische Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto x$, liegt in H , da sie durch $A = E$ (Einheitsmatrix) und $b = 0$ gegeben ist. Folglich besitzt $(H, \circ)$ ein neutrales Element, ist also ein Monoid.

Das Kommutativgesetz gilt nicht: Für $f(x) = x + b$ und $g(x) = Ax$ mit $Ab \neq b$, gilt $(g \circ f)(x) = Ax + Ab$ und $(f \circ g)(x) = Ax + b$. Folglich ist nach Voraussetzung $(g \circ f)(0) \neq (f \circ g)(0)$.

- (2) Welche Elemente von $(H, \circ)$ sind invertierbar?

LÖSUNG: Ein Element $f \in H$ ist invertierbar genau dann, wenn f eine Umkehrabbildung besitzt, das heißt bijektiv ist, und diese in H liegt. Letzteres ist nicht klar!

Wir zeigen zunächst, dass die durch die Gleichungen $t_b(x) := x + b$, $b \in \mathbb{R}^2$, definierten Abbildungen $t_b \in H$ alle bijektiv sind. Wie man direkt nachrechnet gilt nämlich $t_b \circ t_{-b} = t_{-b} \circ t_b = \text{id}$. Die Abbildung t_b besitzt also die Umkehrabbildung t_{-b} .

Es sei nun $f \in H$ bijektiv, wobei $f(x) = Ax + b$. Da die Verkettung bijektiver Abbildungen bijektiv ist, ist auch die Abbildung $t_{-b} \circ f$

bijektiv, wobei $(t_{-b} \circ f)(x) = Ax$ gilt. Aus der linearen Algebra weiß man, dass eine Abbildung der Form

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$$

genau dann bijektiv ist, wenn die Matrix A eine inverse Matrix A^{-1} besitzt. Die Umkehrabbildung g^{-1} ist dann durch die Gleichung $g^{-1}(x) = A^{-1}x$ gegeben. Es folgt also $(t_{-b} \circ f)^{-1}(x) = A^{-1}x$.

Andererseits ist $(t_{-b} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ t_{-b}^{-1} = f^{-1} \circ t_b$. Es folgt also $f^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$.

Es wurde gezeigt: Ist $f \in H$, $f(x) = Ax + b$, bijektiv, so liegt auch die Umkehrabbildung f^{-1} in H , f ist also invertierbar in H , und die Matrix A muss invertierbar sein.

Ist umgekehrt $f(x) = Ax + b$ mit einer invertierbaren Matrix A , so ist die Abbildung $g(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$ die Umkehrabbildung zu f und damit f invertierbar in H .

- (3) Bestimmen Sie drei verschiedene Lösungen der Gleichung $X^2 = \text{id}$ in H .

LÖSUNG: Die Elemente $f_k(x) := A_k x$ mit

$$A_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind Lösungen, denn es gilt $f_k^2(x) = (f_k \circ f_k)(x) = A_k A_k x = x$.

Aufgabe 2: Es sei $n \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl. Eine Matrix $M = (m_{i,j})$ mit n Zeilen und Spalten sowie Koeffizienten $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$ heißt magisches Quadrat, falls die Zeilensummen

$$m_{i,1} + m_{i,2} + \dots + m_{i,n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

die Spaltensummen

$$m_{1,j} + m_{2,j} + \dots + m_{n,j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

und die Diagonalsummen

$$m_{1,1} + m_{2,2} + \dots + m_{n,n}, \quad m_{1,n} + m_{2,n-1} + \dots + m_{n,1}$$

alle denselben Wert $s(M)$ besitzen. Dieser Wert wird »Summe von M « genannt. Es bezeichne $\text{Mag}(n)$ die Menge der magischen Quadrate mit n Zeilen und Spalten.

- (1) Ist $\text{Mag}(n)$ zusammen mit der Matrixaddition eine Halbgruppe, ein Monoid oder eine Gruppe?

LÖSUNG: Wir testen zunächst, ob die Summe zweier magischer Quadrate $M = (a_{i,j})$ und $M' = (b_{i,j})$ wieder ein magisches Quadrat ist. Die Summenmatrix $(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j})$ besitzt die Zeilensummen

$$\begin{aligned} a_{i,1} + b_{i,1} + a_{i,2} + b_{i,2} + \dots + a_{i,n} + b_{i,n} &= a_{i,1} + a_{i,2} + \dots + a_{i,n} + b_{i,1} + b_{i,2} + \dots + b_{i,n} \\ &= s(M) + s(M'), \end{aligned}$$

das heißt die Zeilensummen haben alle denselben Wert $s(M) + s(M')$. Die analoge Rechnung für die Spalten- und die Diagonalsummen liefert dasselbe Ergebnis. Folglich ist $M + M'$ ein magisches Quadrat und $\text{Mag}(n)$ ist eine Halbgruppe, da das Assoziativgesetz für die Addition beliebiger Matrizen gilt, wie aus der linearen Algebra bekannt ist.

Die Nullmatrix ist offensichtlich ein magisches Quadrat (mit der Summe 0). Da die Nullmatrix das neutrale Element der Matrixaddition ist, ist $\text{Mag}(n)$ also sogar ein Monoid.

Die Zeilensummen der Matrix $-M = (-a_{i,j})$ zu einem magischen Quadrat $M = (a_{i,j})$ sind

$$(-a_{i,1}) + (-a_{i,2}) + \dots + (-a_{i,n}) = -s(M)$$

Die analoge Rechnung für die Spalten- und die Diagonalsummen liefert dasselbe Ergebnis. Folglich ist $-M$ ein magisches Quadrat und $\text{Mag}(n)$ ist sogar eine Gruppe.

- (2) Es sei $s_0 \in \mathbb{Z}$. Beschreiben Sie die Menge $\text{Mag}(n, s_0)$ der magischen Quadrate M mit der Summe $s(M) = s_0$ mit Hilfe der Menge der magischen Quadrate $\text{Mag}(n, 0)$ mit der Summe 0. Wie groß ist die Menge $\text{Mag}(n, s_0)$?

LÖSUNG: Unter Punkt 1 haben wir gezeigt, dass für zwei magische Quadrate M, M' stets $s(M + M') = s(M) + s(M')$ gilt, das heißt die Abbildung

$$s : \text{Mag}(n) \rightarrow \mathbb{Z}, M \mapsto s(M)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Für $M_0, M \in \text{Mag}(n, s_0)$ gilt daher $s(M - M_0) = s(M) - s(M_0) = s_0 - s_0 = 0$, also $M - M_0 \in \text{Mag}(n, 0)$. Da $M = M_0 + (M - M_0)$ gilt, ist also jedes magische Quadrat $M \in \text{Mag}(n, s_0)$ Summe $M_0 + M_1$ des magischen Quadrats M_0 und einem magischen Quadrat $M_1 \in \text{Mag}(n, 0)$. Umgekehrt hat jedes magische Quadrat der Form $M_0 + M_1$ mit $M_1 \in \text{Mag}(n, 0)$ die Summe $s(M_0 + M_1) = s_0 + 0 = s_0$. Folglich gilt

$$\text{Mag}(n, s_0) = M_0 + \text{Mag}(n, 0);$$

insbesondere gibt es genauso viele magische Quadrate der Summe s_0 wie es magische Quadrate der Summe 0 gibt.

Aufgabe 3:

- (1) Bestimmen Sie ein $e \in \mathbb{N}$ so, dass für die Permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 6 & 17 & 19 & 16 & 10 & 15 & 18 & 11 & 7 & 9 & 20 & 1 & 4 & 2 & 13 & 12 & 5 & 14 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

die Gleichung $\sigma^e = \text{id}$ gilt.

LÖSUNG: Wir schreiben die Permutation mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens als Produkt von disjunkten Zykeln. Es ergibt sich:

$$\sigma = (1\ 6\ 15\ 13\ 4\ 16\ 12) \circ (2\ 17\ 5\ 10\ 9\ 7\ 18\ 14) \circ (3\ 19\ 8\ 11\ 20) =: \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3.$$

Für einen r -Zykel τ gilt $\tau^r = \text{id}$. Also $\tau_1^7 = \text{id}$, $\tau_2^8 = \text{id}$ und $\tau_3^5 = \text{id}$. Da die Zykeln τ_i disjunkt sind, folgt

$$\sigma^{5 \cdot 7 \cdot 8} = \tau_1^{5 \cdot 7 \cdot 8} \circ \tau_2^{5 \cdot 7 \cdot 8} \circ \tau_3^{5 \cdot 7 \cdot 8} = (\tau_1^7)^{5 \cdot 8} \circ (\tau_2^8)^{5 \cdot 7} \circ (\tau_3^5)^{7 \cdot 8} = \text{id}.$$

- (2) Zeigen Sie, dass die Menge U aller Permutationen $\tau \in S_{20}$ mit der Eigenschaft

$$\tau(2k) = 2k, \quad k = 1, 2, \dots, 10,$$

eine Untergruppe von S_{20} ist. Wieviele Elemente besitzt U ?

LÖSUNG: Wir zeigen zunächst, dass mit $\tau, \tau' \in U$ auch $\tau \circ \tau' \in U$ gilt. Hierzu muss $(\tau \circ \tau')(2k)$ berechnet werden:

$$(\tau \circ \tau')(2k) = \tau(\tau'(2k)) = \tau(2k) = 2k,$$

also tatsächlich $\tau \circ \tau' \in U$.

Weiter muss $\text{id} \in U$ gelten. Dies ist offensichtlich.

Schließlich muss zu jedem $\tau \in U$ auch $\tau^{-1} \in U$ gelten. Aus der Gleichung $\tau(2k) = 2k$ folgt durch Verknüpfen mit τ^{-1} von links: $\tau^{-1}(\tau(2k)) = \tau^{-1}(2k)$. Da $\tau^{-1}(\tau(2k)) = \text{id}(2k) = 2k$ gilt, folgt die Behauptung.

Die Permutationen $\tau \in U$ permutieren die ungeraden Zahlen $\{1, 3, 5, \dots, 19\}$ in jeder möglichen Weise. Da es 10 solcher Zahlen gibt, gilt

$$|U| = 10! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 10 = 3628800.$$

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Diedergruppe D_7 des regelmäßigen 7-Ecks.

- (1) Bestimmen Sie alle Untergruppen von D_7 .

LÖSUNG: Nach dem Satz von Lagrange besitzt eine Untergruppe U von D_7 einen Teiler der Elementzahl $|D_7| = 14$ als Elementzahl. Damit kommen die Zahlen 1, 2, 7, 14 in Frage.

Die Zahlen 1 und 14 liefern die Untergruppen $\{\text{id}\}$ und D_7 .

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Menge der verschiedenen Drehungen eine Untergruppe von D_7 mit sieben Elementen bildet. Eine weitere Untergruppe mit sieben Elementen gibt es nicht: In einer solchen Untergruppe U müsste eine Spiegelung τ liegen, und damit wäre die Menge $\{\text{id}, \tau\}$ eine Untergruppe mit zwei Elementen in U . Das ist nach dem Satz von Lagrange unmöglich.

Jede der sieben Spiegelungen τ des 7-Ecks liefert eine Untergruppe $\{\text{id}, \tau\}$ mit zwei Elementen. Ist andererseits U eine Untergruppe mit zwei Elementen und $\tau \in U$, $\tau \neq \text{id}$, so gilt $\tau^2 = \text{id}$. Folglich ist τ eine Spiegelung oder eine Drehung um π . Letztere ist aber keine Symmetrieoperation des 7-Ecks, das heißt liegt nicht in D_7 .

- (2) Es sei $\tau \in D_7$ eine Spiegelung und $\sigma \in D_7$ die Drehung um $\frac{2\pi}{7}$. Lösen Sie die Gleichung

$$(\sigma^5 \circ \tau) \circ x = \tau \circ \sigma^2$$

und geben Sie die Lösung in der Standardform $\tau^k \circ \sigma^\ell$, $k \in \{0, 1\}$, $\ell \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ an.

LÖSUNG: In D_7 gilt die Gleichung $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma^6$, wie in der Vorlesung gezeigt wurde. Wendet man diese Gleichung, sowie $\tau^2 = \text{id} = \sigma^7$ wiederholt an, so erhält man:

$$\begin{aligned} x &= \tau \circ \sigma^2 \circ \tau \circ \sigma^2 \\ &= \tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma^6 \circ \sigma^2 \\ &= \tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma^8 \\ &= \tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma \\ &= \tau \circ \tau \circ \sigma^6 \circ \sigma \\ &= \tau^2 \circ \sigma^7 \\ &= \text{id}. \end{aligned}$$