Mathematische Strukturen – Übungsblatt 8

Hagen Knaf, SS 2016

Fragen zur Prüfungsvorbereitung – Antworten

Antworten sollen präzise sein, mathematische Begriffe benutzen und keine vagen, umgangssprachlichen Formulierungen.

1. Was ist eine Permutation der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n$?

   Eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

2. Wie kann man zwei Permutationen zu einer neuen Permutation verknüpfen?

   Da Permutationen Abbildungen sind, kann man zwei davon verketten, das heißt nacheinander ausführen. Das funktioniert hier, da Definitions- und Wertebereich von Permutationen gleich sind. Die Verkettung bijektiver Abbildungen ist wieder bijektiv, verkettet man zwei Permutationen, so erhält man also wieder eine Permutation.

3. Geben Sie eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ der komplexen Zahlen an, die mehr als 9 Elemente besitzt.

   Die n-ten Einheitswurzeln, also die komplexen Lösungen der Gleichung $X^n - 1 = 0$ bilden eine Gruppe bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen. Diese Gruppe besitzt n Elemente.

4. Gibt es zu jeder natürlichen Zahl n eine Gruppe mit n Elementen?

   Ja, siehe die Frage 3.

5. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und r, s seien zwei Ringelemente. Was bedeutet die Gleichung $5r = s^{-3}$?

   Das Symbol $5r$ ist eine Kurschreibweise für $r + r + r + r + r$. Ebenso steht s^{-3} für $s^{-1} \cdot s^{-1} \cdot s^{-1}$, wobei s^{-1} das Inverse zu s bezüglich Multiplikation ist (falls es existiert).

6. Es sei $p(X)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $p(\alpha) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $p(X) = (X - \alpha)q(X)$ mit einem Polynom $q(X)$ mit reellen Koeffizienten gilt.

Mittels Polynomdivision kann man p mit Rest durch $X-\alpha$ teilen und erhält

$$p(X) = q(X)(X-\alpha) + r(X),$$

wobei der Rest $r(X)$ einen Grad < 1 besitzt, also konstant ist. Einsetzen von α liefert $r = 0$.

7. Für welche natürlichen Zahlen n sind alle Elemente von $\mathbb{Z}/n$ entweder Einheiten oder nilpotent? Begründung?

   In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n$ eine Einheit ist genau dann, wenn a und n teilerfremd sind, und dass $\overline{a}$ genau dann nilpotent ist, wenn a und n dieselben Primteiler besitzen. Ist also $a \in \{1, \ldots, n-1\}$ teilerfremd zu n, so muss a durch jede Primzahl teilbar sein, durch die auch n teilbar ist. Das gilt insbesondere für jede Primzahl a, die n teilt. Folglich kann es nur eine solche Primzahl geben, das heißt $n = p^m$ mit einer Primzahl p.