

MATHEMATISCHE STRUKTUREN – ÜBUNGSBLATT 8

HAGEN KNAF, SS 2016

Fragen zur Prüfungsvorbereitung

Antworten sollen präzise sein, mathematische Begriffe benutzen und keine vagen, umgangssprachlichen Formulierungen.

1. Was ist eine Permutation der natürlichen Zahlen $1, 2, \dots, n$?
2. Wie kann man zwei Permutationen zu einer neuen Permutation verknüpfen?
3. Geben Sie eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ der komplexen Zahlen an, die mehr als 9 Elemente besitzt.
4. Gibt es zu jeder natürlichen Zahl n eine Gruppe mit n Elementen?
5. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und r, s seien zwei Ringelemente. Was bedeutet die Gleichung $5r = s^{-3}$?
6. Es sei $p(X)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $p(\alpha) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $p(X) = (X - \alpha)q(X)$ mit einem Polynom $q(X)$ mit reellen Koeffizienten gilt.
7. Für welche natürlichen Zahlen n sind alle Elemente von $\mathbb{Z}/n$ nilpotent? Begründung?

Übungsaufgaben

1. Es sei (x_k) eine konvergente Folge reeller Zahlen und

$$X := \{x_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

- (a) Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand von X als Teilmenge der reellen Zahlen versehen mit der Standardmetrik.
- (b) Geben Sie eine Folge (x_k) an, für die X abgeschlossen ist.
- (c) Geben Sie eine Eigenschaft der Folge (x_k) an, die äquivalent zur Abgeschlossenheit von X ist.

2. Entscheiden Sie, ob die Funktionenfolgen gleichmäßig konvergent sind, und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

(a) $(\frac{t^2}{1+kt^2})_{k \in \mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$.

(b) $(1 + \frac{t}{k})_{k \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$.

3. In der Vorlesung haben wir den Raum $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ der quadratischen Matrizen mit zwei Zeilen mit der Maximumsmetrik versehen:

$$d_{\max}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}) := \max(|a - a'|, |b - b'|, |c - c'|, |d - d'|).$$

Es sei (A_k) eine bezüglich dieser Metrik konvergente Folge von Matrizen mit dem Grenzwert A . Zeigen Sie: Sind alle bis auf endlich viele der Folgenglieder A_k *nicht* invertierbar, so ist auch A nicht invertierbar.