

1. Eine Teilmenge Y eines metrischen Raums (X, d) heißt beschränkt, falls es eine abgeschlossene Kugel $B[x_0, r]$ mit der Eigenschaft $Y \subseteq B[x_0, r]$ gibt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über beschränkte Mengen:
 - (a) Sind $Y_1, \dots, Y_r$ beschränkte Teilmengen von X , so sind auch die Teilmengen $Y_1 \cap \dots \cap Y_r$ und $Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ beschränkt.
 - (b) Das Innere Y° einer beschränkten Menge ist beschränkt.
 - (c) Jeder metrische Raum ist nicht beschränkt.
 - (d) Der Abschluss $\overline{Y}$ einer beschränkten Menge ist beschränkt.
 - (e) Die Teilmenge Y ist genau dann beschränkt, wenn ihr Komplement $X \setminus Y$ nicht beschränkt ist.

Bei dieser Aufgabe kommt es darauf an, die Beweise bzw. Begründungen präzise und knapp zu Papier zu bringen.

2. Skizzieren Sie die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:

$$Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) : y \in [0, 1) \right\}.$$

Bestimmen Sie das Innere Y° , den Rand $\text{Rd}(Y)$ und den Abschluss $\overline{Y}$ bezüglich der euklidischen Metrik d_2 auf $\mathbb{R}^2$, und bezüglich der Hammingmetrik h auf $\mathbb{R}^2$.

3. In einem metrischen Raum (X, d) wird der Abstand eines Punktes $x \in X$ von einer Teilmenge $A \subseteq X$ durch

$$D(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

definiert, wobei $\inf$ das Infimum einer Menge reeller Zahlen bezeichnet. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

- (a) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow D(x, A) = 0$.
- (b) $x \in A^\circ \Leftrightarrow D(x, X \setminus A) > 0$.