

MATHEMATISCHE STRUKTUREN – ÜBUNGSBLATT 6

HAGEN KNAF, SS 2016

1. Welche der folgenden Polynomfunktionen sind Primelemente im Ring $\text{Pol}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Polynomfunktionen mit ganzzahligen Koeffizienten:

- $35x + 56$,
- 13 ,
- $3x^2 - 7x + 2$,
- $8x^3 - 1$.

2. Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Kronecker alle rationalen Nullstellen $q \in \mathbb{Q}$ des Polynoms

$$p(x) := x^4 + \frac{183}{77}x^3 + \frac{236}{77}x^2 - \frac{255}{77}x - \frac{25}{77}$$

und führen Sie eine Polynomdivision durch die zu den Nullstellen gehörenden Faktoren $x - q$ durch.

3. Zeigen Sie, dass im Ring $\mathbb{Z}[i]$ die Zahl 5 kein Primelement ist, wohl aber die Zahl 3. Verwenden Sie dabei wie in der Vorlesung bei der Bestimmung der Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$ die komplexe Betragsfunktion.

4. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge R aller Matrizen $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, die sich als Summe $M_1 + M_2 + \dots + M_r$ einer beliebigen Zahl $r \in \mathbb{N}$ von Matrizen der Form

$$zE \cdot A^k \cdot B^\ell, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad E \text{ die Einheitsmatrix,}$$

schreiben lassen, bezüglich Matrixaddition und -multiplikation einen kommutativen Ring bilden.

Gibt es in diesem Ring Nullteiler? Gibt es von 0 verschiedene nilpotente Elemente?