Mathematische Strukturen – Übungsblatt 5

Hagen Knaf, SS 2016

1. In dieser Aufgabe geht es um das Rechnen modulo n, also um den Ring $\mathbb{Z}/n$.

   (a) Zeigen Sie unter Benutzung des Rechnens in $\mathbb{Z}/7$, dass die Polynomgleichung

   $$36x^3 + 56x^2 + 91x + 368 = 0$$

   keine ganzzahlige Lösung besitzt.

   (b) Beweisen Sie mittels Rechnen modulo 3 die Teilbarkeitsregel »Eine Zahl $z \in \mathbb{Z}$ ist durch 3 teilbar genau dann, wenn ihre Quersumme, also die Summe ihrer Ziffern, durch 3 teilbar ist.«

   (c) Bestimmen Sie die nilpotenten Elemente von $\mathbb{Z}/2646$ und erstellen Sie eine Verknüpfungstafel für diese Elemente bezüglich der Addition.

   (d) Zeigen Sie, dass die nilpotenten Elemente von Z/n bezüglich der Addition eine Gruppe bilden.

2. In dieser Aufgabe geht es um das Lösen linearer Gleichungssysteme

   $$\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = & b_2, \end{array}$$

   wobei die Koeffizienten a_{ij} sowie die rechten Seiten b_i Elemente eines kommutativen Rings $(R, +, \cdot)$ sind.

   (a) Es sei $R = \mathbb{Z}/13$. Bestimmen Sie die Lösungen des obigen Gleichungssystems für die Koeffizienten

   $$a_{11} = \overline{7}, a_{12} = \overline{2}, a_{21} = \overline{9}, a_{22} = \overline{6}$$

   sowie die rechten Seiten

   $$b_1 = \overline{3}, b_2 = \overline{5}.$$

(b) Es sei $R = \mathbb{Z}/12$. Lösen Sie das obige Gleichungssystem mit den Koeffizienten und rechten Seiten aus Aufgabe (a) jetzt natürlich aufgefasst als Elemente von $\mathbb{Z}/12$.

(c) Es sei $R = \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass für die Koeffizienten a_{ij} des obigen Gleichungssystems folgende Aussage gilt: Genau dann besitzt das Gleichungssystem für *jede* Vorgabe der rechten Seiten b_i eine eindeutige *ganzzahlige* Lösung, wenn die Bedingung

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \in \{-1, 1\}$$

gilt.

3. Es seien $(R, +_R, \cdot_R)$ und $(S, +_S, \cdot_S)$ Ringe. Betrachten Sie die Menge

$$R \times S := \{(r, s) : r \in R,\ s \in S\}$$

versehen mit den inneren Verknüpfungen

$$(r, s) + (r', s') := (r +_R r', s +_S s')$$

und

$$(r, s) \cdot (r', s') := (r \cdot_R r', s \cdot_S s').$$

Zeigen Sie, dass $(R \times S, +, \cdot)$ ein Ring ist.