Mathematische Strukturen – Übungsblatt 3

Hagen Knaf, SS 2016

1. Eine Funktion $f \in \text{Fun}([a,b],\mathbb{R})$ heißt »gerade«, falls ihr Graph achsensymmetrisch zur Parallelen zur Hochachse durch den Punkt $(\frac{a+b}{2}, 0)$ ist.

   Eine Funktion $f \in \text{Fun}([a,b],\mathbb{R})$ heißt »ungerade«, falls ihr Graph punktsymmetrisch zum Punkt $(\frac{a+b}{2}, 0)$ ist.

   (a) Formulieren Sie die Eigenschaften gerade zu sein und ungerade zu sein mit Hilfe von Gleichungen für die Funktionswerte.

   (b) Zeigen Sie, dass die Menge $G \subset \text{Fun}([a,b],\mathbb{R})$ aller geraden Funktionen und die Menge $U \subset \text{Fun}([a,b],\mathbb{R})$ aller ungeraden Funktionen Untergruppen von $(\text{Fun}([a,b],\mathbb{R}),+)$ sind.

   (c) Beweisen Sie, dass sich jede Funktion $f \in \text{Fun}([a,b],\mathbb{R})$ als punktweise Summe $g+u$ einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u schreiben lässt. Sind g und u durch f eindeutig festgelegt?

   Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $[a,b] = [-c,c]$ eines symmetrisch um die 0 liegenden Intervalls und versuchen Sie auf einfache Weise aus f eine gerade Funktion zu erhalten.

2. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Elemente des in der Vorlesung eingeführten Monoids $(\text{Abb}([0,1]),\circ)$ ein Inverses besitzen, und bestimmen Sie dieses gegebenenfalls: $f_1(t) = t - t^2$, $f_2(t) = e^{-t^2}$, $f_3(t) = 16(t-\frac{1}{2})^5 + \frac{1}{2}$, $f_4(t) = \sqrt{1-t^2}$.

3. Bestimmen Sie Lösungen $x(t), y(t) \in \text{Fun}([0,1],\mathbb{R})$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} t \cdot e^{2t} \cdot x(t) + (t^3-1) \cdot y(t) &= e^{2t} \\ e^t \cdot x(t) + t^2 \cdot e^{-t} \cdot y(t) &= 0 \end{aligned}$$

   Die auftretenden Operationen $+$ und $\cdot$ sind (klarerweise) die punktweise Addition und Multiplikation von Funktionen.

   Gibt es mehr als eine Lösung?