2.1.5 Der Fixpunktsatz von Banach

Definition 131: *Eine Abbildung $\Phi : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt kontrahierend, falls $E(\Phi) < 1$ gilt.*

Theorem 132: *Eine kontrahierende Selbstabbildung $\Phi : X \to X$ eines vollständigen metrischen Raums (X, d) besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in X$, und für diesen gilt:*

$$\forall x_0 \in X \quad x^* = \lim_{k\to\infty} \Phi^k(x_0).$$

Anmerkung: Die Expansion $E(\Phi)$ kann schwierig zu bestimmen sein. Zum Beweis des Satzes genügt es mit einer beliebigen Zahl $C \in (0, 1)$ zu arbeiten, für die $d(\Phi(x), \Phi(x')) \leq Cd(x, x')$ für alle $x, x' \in X$ gilt.

Beweis: Es sei $x_0 \in X$ und $C \in (0, 1)$ mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in X \;\; d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq Cd(x, y).$$

Man zeigt zunächst, dass die Folge $(\Phi^k(x_0))$ eine Cauchyfolge ist. Hierzu sind die Distanzen $d(\Phi^i(x_0), \Phi^j(x_0))$ abzuschätzen, wobei man $j = i + k$, $k \in \mathbb{N}$, annehmen kann.

Nach Voraussetzung gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$d(\Phi^k(x_0), \Phi^{k+1}(x_0)) \leq Cd(\Phi^{k-1}(x_0), \Phi^k(x_0)).$$

Die i-malige Iteration dieser Ungleichung liefert

$$d(\Phi^i(x_0), \Phi^{i+k}(x_0)) \leq C^i d(x_0, \Phi^k(x_0)).$$

Durch iterierte Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} d(x_0, \Phi^k(x_0)) &\leq d(x_0, \Phi(x_0)) + d(\Phi(x_0), \Phi^2(x_0)) + \ldots + d(\Phi^{k-1}(x_0), \Phi^k(x_0)) \\ &\leq d(x_0, \Phi(x_0))(1 + C + \ldots + C^{k-1}) \\ &= d(x_0, \Phi(x_0))\tfrac{1-C^k}{1-C}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man folglich die Abschätzung

$$d(\Phi^i(x_0), \Phi^{i+k}(x_0)) \leq \frac{C^i(1 - C^k)}{1 - C} d(x_0, \Phi(x_0)) \leq \frac{C^i}{1 - C} d(x_0, \Phi(x_0)).$$

Die rechte Seite kann durch entsprechende Wahl von i beliebig klein gemacht werden und hängt nicht von k ab, woraus die Behauptung folgt.

Die Cauchyfolge $(\Phi^k(x_0))$ besitzt wegen der Vollständigkeit von X einen Grenzwert in X. Dieser ist ein Fixpunkt von Φ ist, da die Stetigkeit von Φ die Gleichungen

$$\Phi(\lim_{k\to\infty} \Phi^k(x_0)) = \lim_{k\to\infty} \Phi^{k+1}(x_0) = \lim_{k\to\infty} \Phi^k(x_0)$$

liefert.

Schließlich zeigt man, dass Φ nur einen einzigen Fixpunkt besitzt, und damit auch die Unabhängigkeit des Grenzwerts der Folge $(\Phi^k(x_0))$ von x_0: Sind x^* und x^{**} zwei Fixpunkte von Φ so gilt

$$d(x^*, x^{**}) = d(\Phi(x^*), \Phi(x^{**})) \leq C d(x^*, x^{**}),$$

was $x^* = x^{**}$ erzwingt. □

Der Banach'schen Fixpunktsatzes liefert als eine von vielen Anwendungen ein Iterationsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme.

Das Gauss-Jacobi-Verfahren

Man betrachtet ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n. \tag{38}$$

Die Koeffizientenmatrix A lässt sich in der Form $A = D - B$ mit einer invertierbaren Matrix D schreiben. Für jede Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von (38) gilt dann

$$x = D^{-1}Bx + D^{-1}b;$$

diese ist also Fixpunkt der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto D^{-1}Bx + D^{-1}b. \tag{39}$$

Für jede der früher eingeführten p-Metriken d_p, $p = 1, 2, \infty$, auf $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$d_p(\Phi(x), \Phi(x')) = d_p(D^{-1}Bx, D^{-1}Bx').$$

Wir benötigen also Abschätzungen nach oben für die Größen $d_p(D^{-1}Bx, D^{-1}Bx')$ um entscheiden zu könnnen, ob Φ kontrahierend ist oder nicht. Die Bestimmung dieser Abschätzungen wird im folgenden Beispiel behandelt:

Beispiel 133: Man betrachte die zu der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gehörende lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$. Die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ seien mit der p-Metrik für $p \in \{1, 2, \infty\}$ versehen. Sind a_{ij} die Koeffizienten der Matrix A, so gilt im Fall $p = 1$ für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| &\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}||x_j| \\
&\leq \max(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| : j \in \{1, \ldots, n\}) \sum_{j=1}^{n} |x_j|.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$:

$$d_1(Ax, Ax') \leq Cd_1(x, x') \text{ mit } C = \max(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| : j \in \{1, \ldots, n\}).$$

Im Fall $p = 2$ ergibt sich eine ähnliche Situation:

$$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)^2 \leq \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)(\sum_{i=1}^{m} x_j^2),$$

wobei man die Ungleichung von Cauchy-Schwarz benutzt. Es folgt

$$d_2(Ax, Ax') \leq Cd_2(x, x') \text{ mit } C = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Schließlich zum Fall $p = \infty$:

$$\begin{aligned}
\max(|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| : i \in \{1, \ldots, m\}) &\leq \max(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| : i \in \{1, \ldots, m\}) \\
&\leq \max((\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|) \max(|x_j| : j) : i \in \{1, \ldots, m\}) \\
&\leq \max(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : i) \max(|x_j| : j).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$d_\infty(Ax, Ax') \leq Cd_\infty(x, x') \text{ mit } C = \max(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : i \in \{1, \ldots, m\}).$$

$\diamond$

Wendet man die Ergebnisse des Beispiels auf die Matrix

$$A' = (a'_{ij}) := D^{-1}B$$

so ergibt sich: Die Abbildung (39) ist kontrahierend, falls *eine* der Bedingungen

- $C := \max(\sum_{i=1}^{m} |a'_{ij}| : j \in \{1, \ldots, n\}) < 1$ (Metrik d_1),
- $C := (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} {a'_{ij}}^2)^{\frac{1}{2}} < 1$ (Metrik d_2),
- $C := \max(\sum_{j=1}^{n} |a'_{ij}| : i \in \{1, \ldots, m\}) < 1$ (Metrik d_∞),

erfÜllt ist. Anhand von Beispielen kann man zeigen, dass diese Bedingungen nicht äquivalent sind.

Für die Matrix D wählt man häufig $D = E$ oder eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente mit denen von A übereinstimmen. Im zweiten Fall gilt $a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ und alle drei angegebenen Bedingungen besagen grob, dass die Diagonalelemente in A betragsmäßig dominieren.

In allen diesen Fällen ist jedenfalls der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar und liefert eine näherungsweise Lösung des Systems (38) durch Iteration der Abbildung Φ, wobei man mit einem beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beginnt.