

2.1.4 Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Dieser Abschnitt enthält aktuell nur die in der Vorlesung behandelten Begriffe und Sätze, *keine* der in der Vorlesung diskutierten Details.

DEFINITION 124: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt Isometrie, falls sie die Eigenschaft

$$\forall x, x' \in X \quad d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

besitzt.

BEISPIEL 125: Man betrachte den metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_p)$ für ein $p \in \mathbb{N} \cup \infty$ und die Drehung $D_\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Drehzentrum $(0, 0)$ und Drehwinkel ϕ . Wählt man die Basis $(1, 0), (0, 1)$, so lässt sich D_ϕ durch die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

beschreiben: $D_\phi(x) = Dx$. Es gilt:

$$d_p(D_\phi(0, 0), D_\phi(1, 0)) = (|\cos(\phi)|^p + |\sin(\phi)|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p \neq \infty,$$

$$d_\infty(D_\phi(0, 0), D_\phi(1, 0)) = \max(|\cos \phi|, |\sin \phi|).$$

Notwendige Bedingung dafür, dass D_ϕ bei festem p eine Isometrie ist, ist also

$$|\cos(\phi)|^p + |\sin(\phi)|^p = 1$$

beziehungsweise

$$\max(|\cos \phi|, |\sin \phi|) = 1.$$

Es gilt $|\cos(\phi)|^2 + |\sin(\phi)|^2 = 1$ und außer für $\phi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ gilt für $p > 2$ stets

$$|\cos(\phi)|^p < |\cos(\phi)|^2 \text{ und } |\sin(\phi)|^p < |\sin(\phi)|^2.$$

Folglich ist D_ϕ für $\phi \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ und $p > 2$ *keine* Isometrie. In den Fällen $\phi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ liegen dagegen Isometrien vor, wie man unter Verwendung der Matrix D direkt nachrechnet.

Dieselbe Situation liegt offensichtlich(!) im Fall $p = \infty$ vor.

Im Fall $p = 2$ nutzt man die Tatsache, dass man die Metrik als Matrixprodukt ausdrücken kann:

$$d_2(x, y)^2 = (x - y)^t(x - y),$$

wobei der Exponent t für das Transponieren einer Matrix steht. Für die Matrix D gilt die Gleichung $D^t D = E$. Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned} d_2(Dx, Dy)^2 &= (Dx - Dy)^t (Dx - Dy) \\ &= (D(x - y))^t D(x - y) \\ &= (x - y)^t D^t D(x - y) \\ &= (x - y)^t (x - y). \end{aligned}$$

Folglich ist D_ϕ für jeden Winkel ϕ eine Isometrie.

Es bleibt der Fall $p = 1$: Hier ist für $\phi \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ stets

$$|\cos(\phi)| > |\cos(\phi)|^2 \text{ und } |\sin(\phi)| > |\sin(\phi)|^2.$$

Also ergibt sich dieselbe Situation wie im Fall $p > 2$. ◇

BEISPIEL 126: Landkarten liefern Isometrien: Man betrachtet die Oberfläche

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : d_2(0, x) = 1\}$$

der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ als mathematisches Modell für die Oberfläche der Erdkugel. Auf S^2 betrachtet man die Metrik d des »kürzesten Weges« zwischen zwei Punkten $x, x' \in S^2$. Gilt $x \neq x'$ und ist $K \subset S^2$ der Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$, der durch die Punkte x und x' verläuft, so ist $d(x, x')$ die Länge des kürzeren der beiden Kreisbögen mit den Endpunkten x und x' . Man kann sich leicht davon überzeugen, dass (S^2, d) ein metrischer Raum ist.

Sei nun $T \subset S^2$ eine Teilmenge aufgefasst als metrischer Unterraum, T könnte etwa der Kontinent Australien sein. Dann ist eine Landkarte von T eine Isometrie $L : T \rightarrow \mathbb{R}^2$, wobei man $\mathbb{R}^2$ mit der Metrik

$$d'(y, y') := \mu \cdot d_2(y, y')$$

versieht. Hierbei ist $\mu > 0$ ein geeigneter Maßstabsfaktor. ◇

DEFINITION 127: Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) bezeichnet man die Größe

$$E(f) := \sup\left(\frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')} : x, x' \in X, x \neq x'\right) \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \infty$$

als Expansion von f , die Größe

$$C(f) := \sup\left(\frac{d_X(x, x')}{d_Y(f(x), f(x'))} : x, x' \in X, f(x) \neq f(x') \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \infty\right)$$

als Kontraktion von f und die Größe

$$\text{Dist}(f) := E(f)C(f)$$

als Distorsion von f .

Ist $E(f) \neq \infty$, so heißt f dehnungsbeschränkt.

BEISPIEL 128: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so ist f dehnungsbeschränkt: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu je zwei Zahlen $x, x' \in [a, b]$ eine Zahl $\xi \in (x, x')$ mit der Eigenschaft

$$f(x') - f(x) = f'(\xi)(x' - x).$$

Die stetige Funktion f' besitzt andererseits in $[a, b]$ ein Maximum. Es gilt also

$$E(f) = \max(|f'(x)| : x \in [a, b]).$$

◇

BEISPIEL 129: Für die stetige(!) Funktion $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t}$ gilt offenbar

$$E(f) = \infty.$$

◇

FESTSTELLUNG 130: Stets gilt $\text{Dist}(f) \geq 1$ und es ist $\text{Dist}(f) = 1$ falls f die Eigenschaft

$$\forall x, x' \in X \quad d_Y(f(x), f(x')) = C d_X(x, x')$$

für ein $C \geq 0$ besitzt.

Dehnungsbeschränkte Abbildungen verhalten sich gegenüber konvergenten Folgen »verträglich«: Ist $f : X \rightarrow Y$ dehnungsbeschränkt und (x_k) eine

konvergente Folge in X mit Grenzwert x , so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \subseteq B(x, \frac{\epsilon}{E(f)}).$$

Hieraus ergibt sich die Inklusion

$$f(B(x, \frac{\epsilon}{E(f)})) \subseteq B(f(x), \epsilon),$$

das heisst es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x).$$

Dies motiviert:

DEFINITION 131: *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in X$, falls für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_k) in X die Bildfolge $(f(x_k))$ konvergiert und die Gleichung*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

gilt.

Die Abbildung f heißt stetig, falls sie in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist.

Wie oben bereits bewiesen gilt:

SATZ 132: *Jede dehnungsbeschränkte Abbildung ist stetig.*

SATZ 133: *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist im Punkt $x_0 \in X$ stetig genau dann, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

BEWEIS: $\Rightarrow$: Man führt einen Widerspruchsbeweis, nimmt also an, dass es zu einem gewissen $\epsilon > 0$ kein geeignetes $\delta > 0$ gibt. Es sei dann (δ_k) eine Nullfolge positiver reeller Zahlen. Nach Annahme gibt es zu jedem k ein Element $x_k \in X$ mit der Eigenschaft $d_X(x_k, x) < \delta_k$ aber $d_Y(f(x_k), f(x_0)) \geq \epsilon$. Die Folge (x_k) konvergiert nach Konstruktion gegen x_0 , aber $(f(x_k))$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

$\Leftarrow$: Es sei (x_k) eine gegen x_0 konvergierende Folge in X und $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein δ mit der Eigenschaft

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

und ein n mit der Eigenschaft $d_X(x_k, x_0) < \delta$ für alle $k > n$. Folglich gilt auch $d_Y(f(x_k), f(x_0)) < \epsilon$ für alle $k > n$, das heisst die Folge $(f(x_k))$ konvergiert gegen $f(x_0)$. $\square$