2.1.3 Folgen und Konvergenz

Viele aus der Analysisvorlesung bekannte Begriffe lassen sich in den Bereich der metrischen Räume verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung hat sich als sehr nützliches mathematisches Werkzeug erwiesen, wie zum Beispiel die Vorlesungen zu gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen in diesem Studiengang zeigen werden. Auch die Beispiele dieses und die Ergebnisse des folgenden Abschnitts werden einen Eindruck davon geben.

DEFINITION 107: *Eine Folge in einem metrischen Raum* (X, d) *ist eine Abbildung* $f : \mathbb{N} \to X$.

Wie in der reellen Analysis üblich notiert man Folgen f in der Form

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}},$$

wobei $x_k := f(k)$; die Elemente x_k nennt man Folgenglieder. Der Kürze halber werden Folgen im Weiteren als (x_k), also ohne explizite Angabe der Indexmenge, geschrieben.

DEFINITION 108: *Eine Folge* (x_k) *in dem metrischen Raum* (X, d) *heißt konvergent, falls es ein* $x \in X$ *mit folgender Eigenschaft gibt:*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{>0} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k > n \quad d(x_k, x) < \epsilon.$$

Das Element x *wird als Grenzwert oder Limes der Folge* (x_k) *bezeichnet; symbolisch:* $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$.

Man beachte, dass die positive Zahl ϵ in der Definition auch Werte haben darf, die als Distanzwert $d(y_1, y_2)$ zweier Elemente von X gar nicht vorkommen – siehe hierzu die Hamming-Metrik.

BEISPIEL 109 (METRIK d_∞ (FORTS.)): Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. Die Folge mit den Folgegliedern

$$x_k := (1 + \frac{2}{k}, 2 - \frac{3}{2k})$$

konvergiert gegen den Grenzwert $(1, 2)$, denn es gilt:

$$d_\infty((1 + \frac{2}{k}, 2 - \frac{3}{2k}), (1, 2)) = \max(\frac{2}{k}, \frac{3}{2k}) = \frac{2}{k}.$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ gilt nun $\frac{2}{k} < \epsilon$ genau dann, wenn $k > \frac{2}{\epsilon}$, also wählt man für die natürliche Zahl n in der Konvergenzdefinition die kleinste natürliche Zahl n mit $n > \frac{2}{\epsilon}$.

Die Folge mit den Gliedern

$$x_k := ((-1)^k, \frac{1}{k})$$

besitzt keinen Grenzwert: Für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nimmt $|a - (-1)^k|$ abwechselnd die beiden Werte $|a + 1|$ und $|a - 1|$ an. Ist also $k \in \mathbb{R}^2$ so groß, dass $\frac{1}{k} < \max(|a + 1|, |a - 1|)$, so gilt

$$d_\infty(((-1)^k, \frac{1}{k}), (a, b)) = \max(|a + 1|, |a - 1|);$$

da die rechte Seite unabhängig von k ist, ist die Konvergenzbedingung nicht erfüllbar. ◇

Beispiel 110 (Beschränkte Funktionen (Forts.)): Wir betrachten den metrischen Raum $B([0, 2\pi], \mathbb{R})$ der beschränkten Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Die Folge mit den Gliedern

$$x_k := \cos(t) + \frac{1}{k}\sin(kt)$$

konvergiert gegen $\cos(t)$, denn es gilt

$$d_\infty(\cos(t) + \frac{1}{k}\sin(kt), \cos(t)) = \sup(|\frac{1}{k}\sin(kt)| : t \in [0, 2\pi]) = \frac{1}{k}.$$

◇

Wieviele Grenzwerte kann eine konvergente Folge besitzen? Aus der reellen Analysis ist bekannt, dass eine konvergente Folge reeller Zahlen nur einen Grenzwert besitzt. Gilt das auch in der hier betrachteten allgemeineren Situation?

Feststellung 111: *Der Grenzwert x einer konvergenten Folge (x_k) ist eindeutig bestimmt. Weiter besitzt eine konvergente Folge (x_k) die Eigenschaft*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{>0} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall i, j > n \quad d(x_i, x_j) < \epsilon. \tag{28}$$

Beweis: Es seien x und x' Grenzwerte der Folge (x_k) und $\epsilon > 0$. Dann gibt es Zahlen $n, n' \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\forall k > n \quad d(x_k, x) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall k > n' \quad d(x_k, x') < \frac{\epsilon}{2}.$$

Für $k > \max(n, n')$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$d(x, x') \leq d(x, x_k) + d(x_k, x') < \epsilon.$$

Da ϵ beliebig war, ergibt sich aus der Reflexivität $x = x'$.

Es sei (x_k) eine gegen x konvergente Folge und $\epsilon > 0$. Es gibt dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\forall k > n \quad d(x_k, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nach der Dreiecksungleichung folgt für $i, j > n$ dann

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x, x_j) < \epsilon.$$

□

Die Feststellung 111 liefert ein für die Konvergenz einer Folge notwendiges Kriterium, für dessen Überprüfung man nur die Folgenglieder selbst betrachten muss. Wegen seiner Bedeutung hat es einen eigenen Namen:

Definition 112 (Cauchykriterium): *Eine Folge (x_k) in dem metrischen Raums (X, d) heißt Cauchyfolge, falls sie die Eigenschaft (28) besitzt.*

Die Feststellung 111 besagt also unter anderem, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Aus der reellen Analysis weiß man bereits, dass die logische Umkehrung dieser Aussage im allgemeinen falsch ist. In dem metrischen Raum $\mathbb{Q}$ mit der Metrik $d(x, y) := |x - y|$ gibt es nicht-konvergente Cauchyfolgen: Die Rekursionsformel

$$x_{k+1} := \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

liefert für den Startwert $x_1 = 1$ eine solche Folge. Die ersten Folgenglieder lauten gerundet:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 1.5 \\
x_3 &= 1.4166666666666666666666666666666 \\
x_4 &= 1{,}4142156862745098039215686627451 \\
x_5 &= 1{,}4142135623746899106262955788901 \\
x_6 &= 1{,}4142135623730950488016896235025.
\end{aligned}$$

Im Bereich der reellen Zahlen gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, wobei gerundet

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097.$$

DEFINITION 113: *Der metrische Raum (X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.*

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ versehen mit der Metrik $d(x, y) := |x - y|$ sind ein vollständiger metrischer Raum, wie man in der reellen Analysis beweist.

BEISPIEL 114 (HAMMING-METRIK (FORTS.)): Es seien $X_1, \ldots, X_r$ nichtleere Mengen und auf der Produktmenge $X := X_1 \times \ldots \times X_r$ werde die Hamming-Metrik h betrachtet. Es sei nun (x_k) eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Es gibt also zu $\epsilon = 1$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $h(x_k, x) < 1$ für alle $k > n$. Da aus $h(x_k, x) < 1$ die Gleichung $h(x_k, x) = 0$ folgt, liefert die Reflexivität der Metrik h: $x_k = x$ für alle $k > n$, das heisst die Folge (x_k) wird schließlich konstant:

$$(x_k) = (x_1, x_2, \ldots, x_m = x, x_{m+1} = x, x_{m+2} = x, \ldots). \tag{29}$$

Offensichtlich gilt in jedem metrischen Raum: Eine schließlich konstante Folge (x_k) (29) ist konvergent; die konvergenten Folgen in (X, h) sind also alle bekannt.

Es sei nun (x_k) eine Cauchyfolge. Zu $\epsilon = 1$ gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $h(x_i, x_j) < 1$ für alle $i, j > n$. Also gilt $h(x_i, x_j) = 0$ für alle $i, j > n$ und damit $x_i = x_{n+1}$ für alle $i > n$. Die Cauchyfolge (x_k) ist also schließlich konstant und daher konvergent. Der metrische Raum (X, h) ist vollständig. $\diamond$

BEISPIEL 115: Es sei $\mathrm{Pol}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten. Wir betrachten wieder die »Koeffizientenvergleichsmetrik«

$$d_K\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i, \sum_{i=0}^{n} b_i t^i\Big) := \max(|a_i - b_i| : i \in 0, \ldots n\}.$$

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ definiere man das Polynom $p_k := 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \ldots + \frac{1}{k}t^{k+1}$. Es gilt

$$d(p_k, p_\ell) = \max\Big(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{\ell+1}\Big),$$

womit (p_k) eine Cauchyfolge ist. Diese Folge besitzt keinen Grenzwert: Ist nämlich $x = (a_1, \ldots, a_n, 0 \ldots) \in X$, so gilt für jedes $k > n$ die Gleichung

$$d(p_k, x) = \max(|\frac{1}{i} - a_i| : i = 1, \ldots, n, \frac{1}{n+1}),$$

das Element x lässt sich also nicht beliebig gut durch Folgenglieder x_k approximieren. Der metrische Raum (X, d) ist nicht vollständig. $\diamond$

Unvollständigkeit kann eine sehr störende Eigenschaft sein; dies gilt insbesondere für die Verwendung metrischer Räume in der Analysis, weniger für den Einsatz im Bereich der Datenanalyse. Es stellt sich daher die natürliche Frage, ob man einen metrischen Raum ähnlich wie die rationalen Zahlen vervollständigen kann. Die Antwort lautet »ja«. Wir wollen diese Antwort in einer speziellen, für angewandte Mathematiker relevanten Situation begründen. Ein wesentlicher Schritt hierzu ist die Beschreibung abgeschlossener Mengen mit Hilfe konvergenter Folgen.

SATZ 116: *Die Teilmenge A des metrischen Raums (X, d) ist abgeschlossen genau dann, wenn der Grenzwert jeder in A verlaufenden, konvergenten Folge (x_k) in A liegt.*

BEWEIS: $\Rightarrow$: Es sei (x_k) eine konvergente Folge mit dem Grenzwert x. Dann liegt in jeder Kugel $B(x, r)$ ein Folgenglied $x_k \in A$, womit x ein Berührungspunkt von A ist, also wegen der Abgeschlossenheit von A in A liegt..

$\Leftarrow$: Man führt ein Widerspruchsbeweis, nimmt also an, dass A nicht abgeschlossen ist. Dann ist $X \setminus A$ nicht offen, folglich existiert ein $x \in X \setminus A$ mit der Eigenschaft: Jede offene Kugel $B(x, r)$ hat mit A nichtleeren Schnitt.

Sei (r_k) eine Nullfolge positiver reeller Zahlen. Nach Wahl von x gibt es in jeder offenen Kugel $B(x, r_k)$ ein Element $x_k \in A$. Die Folge (x_k) konvergiert dann nach Konstruktion gegen x und liegt in A. Nach Annahme muss folglich $x \in A$ gelten – ein Widerspruch. $\square$

In der angewandten Mathematik tritt nun häufiger die Situation auf, dass man in einem metrischen Raum (Y, d_Y) arbeitet, der selbst ein metrischer Unterraum eines vollständigen metrischen Raums (X, d_X) ist. Das heißt es gilt $Y \subset X$ und für alle $y, y' \in Y$ gilt $d_Y(y, y') = d_X(y, y')$. In dieser Situation lässt sich die Vervollständigung von (Y, d_Y) leicht bestimmen, wie das nächste Resultat zeigt:

Satz 117: *Es sei (X,d) ein metrischer Raum.*

1. *Ist Y ein vollständiger metrischer Unterraum von (X,d), so ist Y abgeschlossen.*

2. *Ist (X,d) vollständig und Y abgeschlossen, so ist Y ein vollständiger metrischer Unterraum von (X,d).*

Aus Punkt 2 folgt insbesondere: Ist (Y,d_Y) ein metrischer Unterraum des vollständigen metrischen Raums (X,d_X), so ist der Abschluss $\overline{Y}$ von Y eine Vervollständigung von (Y,d_Y).

Beweis: Punkt 1: Es sei (x_k) eine konvergente Folge mit Gliedern $x_k \in A$. Nach Feststellung 111 ist (x_k) dann eine Cauchyfolge in (X,d), also auch eine Cauchyfolge im metrischen Unterraum $(A, d|_{A\times A})$. Da letzterer nach Voraussetzung vollständig ist, liegt der Grenzwert der Folge in A. Da dieses Argument für jede konvergente Folge mit Gliedern in A gilt, folgt aus Satz 116 die Behauptung.

Punkt 2: Es sei (x_k) eine Cauchyfolge in dem metrischen Unterraum $(A, d|_{A\times A})$. Diese ist dann auch eine Cauchyfolge in (X,d), womit sie nach Voraussetzung einen Grenzwert x in X besitzt. Da A abgeschlossen ist, liefert Satz 116 $x \in A$. Da dieses Argument für jede Cauchyfolge mit Gliedern in A gilt, ist $(A, d|_{A\times A})$ vollständig. □

Gleichmässige Konvergenz

Als Anwendung der allgemeinen Überlegungen, die den Sätzen X und Y zugrunde liegen, untersuchen wir die Vollständigkeit des metrischen Raums $(\mathrm{B}(D,\mathbb{R}), d_\infty)$ der beschränkten Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$. Der gemeinsame Definitionsbereich D der betrachteten Funktionen kann eine beliebige Menge sein.

Nach Definition ist eine Folge (f_k) von Elementen dieses Raums konvergent, wenn es ein $f \in \mathrm{B}(D,\mathbb{R})$ gibt, für welches

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \forall k > n \ \ d_\infty(f_k, f) < \epsilon. \tag{30}$$

gilt. Da für jedes $t \in D$ nach Definition der Metrik d_∞ die Ungleichung

$$d(f_k(t), f(t)) \leq d_\infty(f_k, f)$$

gilt, folgt aus (30)

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N} \, \forall k > n \, \forall t \in D \;\; d(f_k(t), f(t)) < \epsilon. \tag{31}$$

Insbesondere gilt für jedes $t \in D$:

$$\lim_{k \to \infty} f_k(t) = f(t). \tag{32}$$

Die Bedingung (33) ist aber viel stärker als (32): Schreibt man für (32) das Konvergenzkriterium auf, so ergibt sich

$$\forall t \in D \, \forall \epsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N} \, \forall k > n \;\; d(f_k(t), f(t)) < \epsilon. \tag{33}$$

Bei gegebenem ϵ hängt die Schranke n, ab der die Annäherung an den Grenzwert unter ϵ liegt, also vom Wert von t ab. Bei variierenden Werten von t variiert auch n und man findet möglicherweise keine vom Wert von t unabhängige Schranke. In (33) dagegen gilt die zu ϵ gehörende Schranke n unabhängig vom Wert von t. Motiviert durch diese Situation definiert man:

Definition 118: *Eine Folge* (f_k) *von Funktionen* $f_k : D \to \mathbb{R}$ *mit dem nichtleeren Definitionsbereich* D *heißt punktweise konvergent gegen die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$*, falls für jedes* $t \in D$ *die Gleichung (32) gilt.*

Liegt die Folge (f_k) *im Raum* $\mathrm{B}(D, \mathbb{R})$ *und konvergiert bezüglich der Metrik* d_∞ *gegen* f*, so nennt man die Folge* (f_k) *gleichmäßig konvergent gegen* f*.*

Es wurde bereits gezeigt:

Feststellung 119: *Konvergiert die Folge* (f_k) *gleichmäßig gegen* f*, so auch punktweise.*

Dieses Ergebnis besitzt eine nützliche Konsequenz: Weiß man, dass eine Folge (f_k) gleichmäßig konvergiert, so kann man ihren Grenzwert *punktweise* berechnen. Dies kann man auch zum Nachweis gleichmäßiger Konvergenz nutzen, da der punktweise Grenzwert als Kandidat für den Grenzwert bezüglich d_∞ eingesetzt werden kann. Das folgende Beispiel liefert eine Anwendung dieses Prinzips und zeigt, dass die Implikation $\Leftarrow$ in Feststellung 119 nicht gilt.

Beispiel 120: Im Raum $B([0,1],\mathbb{R})$ betrachte man die Funktionenfolge

$$f_k(t) := t^k;$$

für $t \in [0,1)$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(t) = 0.$$

Weiter hat man

$$\lim_{k\to\infty} f_k(1) = 1.$$

Der punktweise Grenzwert von (f_k) ist also die beschränkte Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 0$ für $t \in [0,1)$ und $f(1) = 1$. Diese ist nicht der gleichmäßige Grenzwert von (f_k), denn es gilt:

$$d_\infty(f_k, f) = \sup(|f_k(t) - f(t)| : t \in [0,1]) = 1$$

Die Folge (f_k) konvergiert nicht gleichmäßig.

Ist (f_k) eine Cauchyfolge? Hierzu muss man $d_\infty(f_k, f_\ell)$ bestimmen. Ohne Einschränkung kann man $k < \ell$ annehmen, womit $t^k \geq t^l$ gilt. Das gesuchte Supremum ist also das Maximum der Funktion $g(t) := t^k - t^l = t^k(1 - t^{\ell-k})$. Ableiten liefert $g'(t) = kt^{k-1} - \ell t^{\ell-1} = t^{k-1}(k - \ell t^{\ell-k})$. Das Maximum liegt also bei

$$t_0 = \sqrt[\ell-k]{\frac{k}{\ell}}$$

mit dem Funktionswert

$$g(t_0) = \sqrt[\ell-k]{(\frac{k}{\ell})^k}(1 - \frac{k}{\ell}).$$

Ist etwa $\ell = 2k$, so erhält man

$$g(t_0) = \frac{1}{4},$$

das heißt (f_k) ist keine Cauchyfolge. $\diamond$

Wir wenden uns nun wieder der Frage nach der Vollständigkeit des Raums $B(D,\mathbb{R})$ der beschränkten Funktionen mit dem Definitionsbereich D zu: Es sei (f_k) eine Cauchyfolge in $B(D,\mathbb{R})$, es gilt also

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall i,j > n\ \ d_\infty(f_i, f_j) < \epsilon.$$

Kombiniert man diese Bedingung mit den Ungleichungen

$$\forall t \in D \; |f_i(t) - f_j(t)| \leq d_\infty(f_i, f_j),$$

so ergibt sich

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall i, j > n \; \forall t \in D \;\; |f_i(t) - f_j(t)| < \epsilon. \tag{34}$$

Hieraus folgt, dass die Folge $(f_k(t))$ für jedes $t \in D$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ bildet. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, haben diese Folgen einen Grenzwert und man kann eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ durch die Gleichung

$$f(t) := \lim_{k \to \infty} f_k(t)$$

definieren. Die Vollständigkeit von $\mathrm{B}(D, \mathbb{R})$ ist bewiesen, wenn man zeigen kann, dass die Abbildung f beschränkt ist und die Folge (f_k) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Für festes $i \in \mathbb{N}$ und $t \in D$ ergibt sich unter Benutzung der Stetigkeit der Betragsfunktion $g(t) = |t|$ die Gleichung

$$\lim_{j \to \infty} |f_i(t) - f_j(t)| = |f_i(t) - f(t)|.$$

Kombiniert man dies mit (34) ergibt sich:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall i > n \; \forall t \in D \;\; |f_i(t) - f(t)| \leq \epsilon. \tag{35}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ und $i > n$, n wie in (35) gewählt. Nach Voraussetzung ist $|f_i(t)| \leq C$ für ein $C > 0$. Hieraus erhält man für jedes $t \in D$

$$|f(t)| \leq |f(t) - f_i(t)| + |f_i(x)| \leq \epsilon + C,$$

das heißt f ist beschränkt. Die Bedingung (35) lässt sich nun umschreiben in

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall i > n \;\; d_\infty(f_i, f) \leq \epsilon,$$

womit man die angestrebte gleichmäßige Konvergenz gezeigt hat. Wir haben also bewiesen:

Satz 121: *Der metrische Raum $(B(D,R), d_\infty)$ ist vollständig.*

Der Definitionsbereich D der im obigen Satz betrachteten Abbildungen ist beliebig; er muss noch nicht einmal aus Zahlen bestehen. Wir haben bereits gesehen, dass im Fall eines reellen Intervalls $D = [a, b]$ der punktweise Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen nicht selbst stetig sein muss. Wie ist das mit dem gleichmäßigen Grenzwert?

Definition 122: *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall endlicher Länge. Die Menge aller stetiger Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wird mit $C([a, b], \mathbb{R})$ bezeichnet.*

Wie aus der Analysisvorlesung bekannt, besitzt jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein Maximum ist also beschränkt. Anders ausgedrückt gilt:

$$C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq B([a, b], \mathbb{R}).$$

Die Frage, ob der gleichmässige Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, lässt sich wegen Satz 116 wie folgt umformulieren: Ist $C([a, b], \mathbb{R})$ eine abgeschlossene Teilmenge von $B([a, b], \mathbb{R})$? Wir beantworten diese:

Satz 123: *Die Menge $C([a, b], \mathbb{R})$ ist abgeschlossen in $B([a, b], \mathbb{R})$. Insbesondere ist der metrische Raum $(C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ vollständig.*

Beweis: Die Abgeschlossenheit von $C([a, b], \mathbb{R})$ ist äquivalent zur Offenheit von $B([a, b], \mathbb{R}) \setminus C([a, b], \mathbb{R})$. Es ist also zu zeigen, dass es um jede nicht stetige Funktion $f \in \mathrm{B}([a, b], \mathbb{R})$ eine Kugel $B(f, r)$ gibt, die vollständig in $B([a, b], \mathbb{R}) \setminus C([a, b], \mathbb{R})$ liegt.

Es sei $x_0 \in [a, b]$ ein Unstetigkeitspunkt von f. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass für jede offene Kugel $B(x_0, \delta)$ gilt: $f(B(x_0, \delta)) \not\subseteq B(f(x_0), \epsilon)$. Jedes $g \in B(f, \frac{\epsilon}{3})$ besitzt dann folgende Eigenschaft: Ist $x \in B(x_0, \delta)$ mit $f(x) \notin B(f(x_0), \epsilon)$, so gilt $g(x) \notin B(g(x_0), \frac{\epsilon}{3})$, denn:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)\ | &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq \tfrac{2\epsilon}{3} + |g(x) - g(x_0)|. \end{aligned}$$

Es folgt, dass g nicht stetig in x_0 ist und damit $B(f, \frac{\epsilon}{3}) \subseteq B([a, b], \mathbb{R}) \setminus C([a, b], \mathbb{R})$ gilt.

Die Vollständigkeitsaussage folgt aus Satz 117 und der Vollständigkeit von $B([a, b], \mathbb{R})$. $\square$