

2.1.2 Geometrie in metrischen Räumen

Die Geometrie (»Erdmessung«) befasst sich in ihrer ursprünglichen Form mit den Gesetzmäßigkeiten, denen bestimmte Arten von Punktmengen im zwei- und dreidimensionalen Raum gehorchen. Dabei betrachtete Punktmengen sind zum Beispiel Geraden, Dreiecke, Quader und Kugeln. Zur Formulierung von Gesetzmäßigkeiten werden Abstände zwischen Punkten, Längen, Winkel, Flächen- und Rauminhalte und andere Eigenschaften verwendet. In der modernen Mathematik betreibt man Geometrie nicht nur im zwei- und dreidimensionalen Anschauungsraum, sondern auch in anderen abtrakteren »Räumen« wie zum Beispiel in metrischen Räumen. In diesen kann man allerdings nur Abstände messen, Größen wie Winkel oder Flächeninhalte stehen zur Formulierung von Gesetzmäßigkeiten nicht zur Verfügung. Dennoch kann man interessante und anwendungsrelevante Sachverhalte formulieren und beweisen.

Eine Vollkugel im Raum ist die Menge aller Raumpunkte, die von einem gegebenen Punkt x_0 einen Abstand kleiner oder gleich einer gegebenen positiven Zahl r besitzen. x_0 nennt man dann den Mittelpunkt der Kugel und r ihren Radius. Diese Definition lässt sich wörtlich auf metrische Räume anstelle des dreidimensionalen Anschauungsraums übertragen.

DEFINITION 88: *Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $r \in \mathbb{R}^{>0}$. Die Teilmengen*

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &:= \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \\ B[x_0, r] &:= \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} \end{aligned}$$

werden als offene beziehungsweise abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x_0 und Radius r bezeichnet.

Die abgeschlossene Kugel $B[x_0, r]$ entspricht dabei der oben erwähnten Vollkugel im Raum und die Teilmenge $B[x_0, r] \setminus B(x_0, r)$ entspricht ihrer Oberfläche. Die offene Kugel $B(x_0, r)$ ist ein Analogon zum Inneren der Vollkugel.

Die folgende Liste gibt einen Eindruck vom »Aussehen« von Kugeln in verschiedenen metrischen Räumen:

- In $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik ist eine offene bzw. abgeschlossene Kugel ein offenes bzw. abgeschlossenes Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ bzw. $[x_0 - r, x_0 + r]$ mit Mittelpunkt x_0 und der Länge $2r$.

- In $(\mathbb{R}^2, d_2)$ entspricht die abgeschlossene Kugel $B[x_0, r]$ einer Kreisscheibe mit Mittelpunkt x_0 und inklusive dem Kreis vom Radius r . In der offenen Kugel $B(x_0, r)$ fehlt dieser Kreis im Vergleich zu $B[x_0, r]$.

Führt man ein rechtwinkeliges Koordinatensystem mit den Koordinaten (t_1, t_2) ein, so ist $x_0 = (a, b)$ und es gilt

$$B[x_0, r] = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : (t_1 - a)^2 + (t_2 - b)^2 \leq r^2\}$$

sowie

$$B(x_0, r) = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : (t_1 - a)^2 + (t_2 - b)^2 < r^2\}.$$

- In $(\mathbb{R}^3, d_2)$ ist, wie schon erwähnt, $B[x_0, r]$ eine Vollkugel mit Mittelpunkt x_0 und Radius r .
- In $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ist $B[x_0, r]$ ein achsenparalleles Quadrat der Seitenlänge $2r$ mit Mittelpunkt x_0 . In rechtwinkligen Koordinaten (t_1, t_2) wie oben gilt für $x_0 = (a, b)$:

$$B[x_0, r] = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : \max(|t_1 - a|, |t_2 - b|) \leq r\}.$$

Die Bedingung $\max(|t_1 - a|, |t_2 - b|) \leq r$ ist äquivalent zu

$$t_1 \in [a - r, a + r] \wedge t_2 \in [b - r, b + r],$$

womit tatsächlich $B[x_0, r] = [a - r, a + r] \times [b - r, b + r]$ gilt – siehe Abbildung 9. Die offene Kugel $B(x_0, r)$ lässt sich ganz analog durch offene Intervalle beschreiben.

- In $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ist $B[x_0, r]$ eine Raute der Seitenlänge $r\sqrt{2}$ mit Mittelpunkt x_0 und achsenparallelen Diagonalen – siehe Abbildung 10. Dies ergibt sich aus der Definition

$$B[x_0, r] = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : |t_1 - a| + |t_2 - b| \leq r\},$$

die bei fester Koordinate t_2 die Bedingung

$$t_1 \in [a - (r - |t_2 - b|), a + (r - |t_2 - b|)]$$

für die Koordinate t_1 liefert.

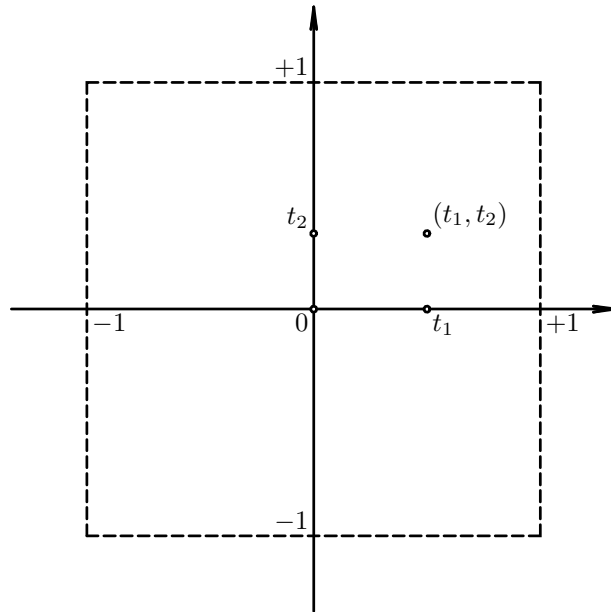


Abbildung 9: Kugel in $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$

- In $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Hamming-Metrik h gilt das Folgende:
 - $B[x_0, r] = \{x_0\}$, falls $r \in (0, 1)$,
 - $B[x_0, r] = (\{a\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{b\})$, wobei $x_0 = (a, b)$, falls $r \in [1, 2)$,
 - $B[x_0, r] = \mathbb{R}^2$ falls $r \geq 2$.

Hier treten gleich zwei Phänomene auf, die zeigen, dass man sich mit dem Begriff des metrischen Raums weit von der Anschauung weg bewegt hat: Zum einen sehen »Kugeln« nicht im Entferntesten mehr aus wie anschauliche Kugeln. Zum anderen gilt für jedes $r \notin \{1, 2\}$ die Gleichung $B(x_0, r) = B[x_0, r]$, eine abgeschlossene Kugel dieser Art besitzt also in gewisser Weise keine »Oberfläche«.

Die Punkte einer Kugel $B(x_0, r)$ »umgeben« den Mittelpunkt. Diese Vorstellung führt zur Idee diejenigen Teilmengen eines metrischen Raums zu

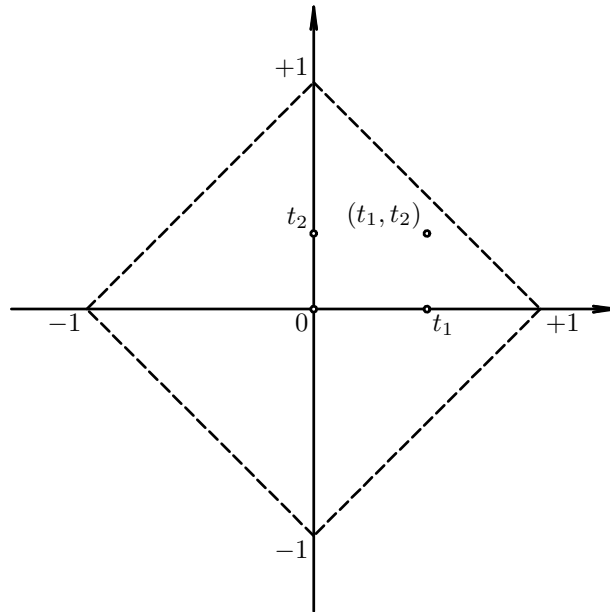


Abbildung 10: Kugel in $(\mathbb{R}^2, d_1)$

betrachten, deren Elemente von Elementen der Teilmenge »umgeben« sind:

DEFINITION 89: *Eine Teilmenge U des metrischen Raums (X, d) heißt offen, falls sie die Eigenschaft*

$$\forall u \in U \exists r > 0 \quad B(u, r) \subseteq U$$

besitzt.

Die Abbildung 11 stellt eine offene Menge U dar, nämlich die von der unterbrochenen Linie umrandete Fläche; die Linie selbst zählt hier nicht mit zu U . Die offenen Kugeln um zwei Punkte $u_1, u_2 \in U$ sind als Kreisscheiben mit unterbrochener Randlinie dargestellt. Die Randlinie zählt wiederum nicht zur Kreisscheibe dazu.

Die mengentheoretischen Eigenschaften offener Mengen werden im nächsten Resultat zusammengefasst:

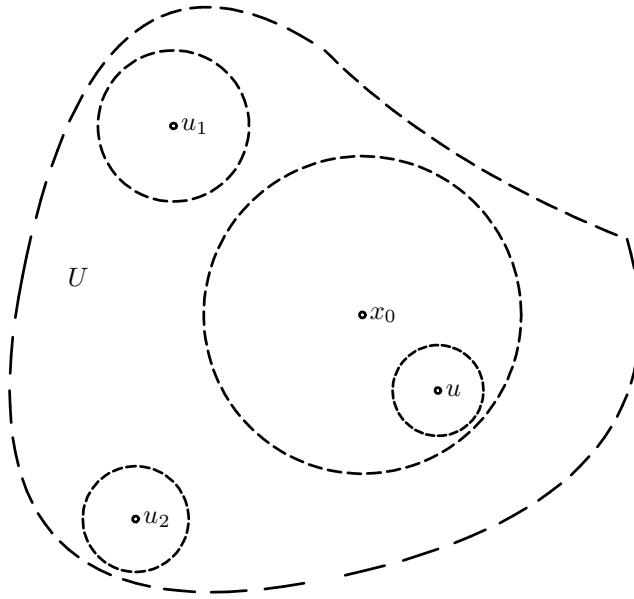


Abbildung 11: Offene Menge und offene Kugeln

SATZ 90: *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gelten:*

1. *Die leere Menge $\emptyset$ und X sind offen.*
2. *Jede offene Kugel ist offen.*
3. *Sind $U_1, \dots, U_r$ offene Teilmengen, so ist auch $\bigcap_{k=1}^r U_k$ offen.*
4. *Ist $\mathcal{U}$ eine Menge offener Teilmengen, so ist auch $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ offen.*

BEWEIS: 1. Die leere Menge besitzt keine Punkte, die die Offenheitsbedingung verletzen könnten. Also ist die Bedingung erfüllt und $\emptyset$ ist offen. Die gesamte Raum X enthält jede offene Kugel.

2. (siehe Abbildung 11) Es sei $u \in B(x_0, r)$ ein Punkt in einer offenen Kugel. Die Zahl $s := r - d(u, x_0)$ ist dann positiv. Es gilt $B(u, s) \subseteq B(x_0, r)$:

Ist nämlich $v \in B(u, s)$, so gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(v, x_0) \leq d(v, u) + d(u, x_0) < s + (r - s) = r,$$

also $v \in B(x_0, r)$.

3. Es sei $u \in \bigcap_{k=1}^r U_k$. Da die Mengen U_k offen sind, gibt es offene Kugeln $B(u, r_k) \subseteq U_k$. Die Zahl $r := \min(r_1, \dots, r_k)$ ist positiv. Für die offene Kugel $B(u, r)$ gilt dann $B(u, r) \subseteq B(u, r_k) \subseteq U_k$ für alle k , also die Behauptung.

4. Ist $u \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, so gibt es ein $V \in \mathcal{U}$ mit $u \in V$. Nach Voraussetzung ist V offen, weshalb es eine Kugel $B(u, r) \subseteq V$ gibt. Da $V \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ gilt, ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Die Kombination der Punkte 2 und 4 liefert folgende Beschreibung offener Mengen:

KOROLLAR 91: *Die Teilmenge U des metrischen Raums (X, d) ist offen genau dann, wenn U Vereinigung offener Kugeln ist.*

BEWEIS: Ist U offen, so wählt man zu jedem Punkt $u \in U$ eine offene Kugel $B(u, r_u) \subseteq U$. Es gilt dann

$$U = \bigcup_{u \in U} B(u, r_u).$$

Ist andererseits $\mathcal{U}$ eine Menge offener Kugeln für die $U = \bigcup_{B \in \mathcal{U}} B$ gilt, so ist U nach den Punkten 2 und 4 von Satz 90 selbst offen. $\square$

BEISPIEL 92: In $\mathbb{R}$ versehen mit der Standardmetrik ist nach Punkt 4 von Satz 90 jede Vereinigung offener Intervalle (a, b) eine offene Menge. Mit etwas Mengenlehre kann man zeigen, dass *jede* offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ Vereinigung von endlich vielen oder von abzählbar unendlich vielen disjunkten offenen Intervallen ist. $\diamond$

BEISPIEL 93: Es sei (X, d) ein metrischer Raum für den das Minimum

$$d_0 := \min(d(x, y) : x, y \in X, x \neq y)$$

existiert. Dann gilt $B(x_0, d_0) = \{x_0\}$ für jeden Punkt $x_0 \in X$. Da $B(x_0, d_0)$ offen und eine Teilmenge $Y \subseteq X$ Vereinigung ihrer einpunktigen Teilmengen ist, ist jede Teilmenge $Y \subseteq X$ offen, und damit auch abgeschlossen. Ein Beispiel für einen solchen metrischen Raum wird durch die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ versehen mit der Standardmetrik geliefert. $\diamond$

Offene Mengen treten ganz natürlich zum Beispiel im Kontext von Robustheitsanforderungen an mathematische Operationen auf:

BEISPIEL 94: Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ der reellen, quadratischen Matrizen mit zwei Zeilen und Spalten. Die folgenden Überlegungen gelten auch für reelle, quadratische Matrizen beliebiger Zeilenzahl, allerdings mit einer komplizierteren Begründung.

Die Menge $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ wird mit der Maximumsmetrik

$$d_{\max}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) := \max(|a - a'|, |b - b'|, |c - c'|, |d - d'|)$$

versehen; es ist nicht erforderlich die Metrikeigenschaften nachzuprüfen, da die obige Abbildung im wesentlichen dieselbe, wie die Maximumsmetrik auf dem Raum $\mathbb{R}^4$ ist. Diese haben wir bereits untersucht.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine invertierbare Matrix. Wir wollen die Frage untersuchen, für welche »Störungen« $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c, \epsilon_d \in \mathbb{R}$ der Koeffizienten die gestörte Matrix

$$A' := \begin{pmatrix} a + \epsilon_a & b + \epsilon_b \\ c + \epsilon_c & d + \epsilon_d \end{pmatrix}$$

invertierbar bleibt. In der Praxis tritt diese Frage zum Beispiel dann auf, wenn eine theoretisch invertierbare Matrix A durch Messung bestimmt wird. Dabei treten Messfehler auf, die zur Nichtinvertierbarkeit führen können. Auch in der Numerik können Rundungsfehler einen solchen Effekt bewirken.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass eine Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante ungleich 0 ist. Im Fall der Matrix A' führt dies zu der Bedingung

$$(a + \epsilon_a)(d + \epsilon_d) - (b + \epsilon_b)(c + \epsilon_c) \neq 0.$$

Wir untersuchen folglich, unter welchen Voraussetzungen an die Störungen diese Ungleichung eintritt. Es gilt

$$(a + \epsilon_a)(d + \epsilon_d) - (b + \epsilon_b)(c + \epsilon_c) = ad - bc + a\epsilon_d + \epsilon_a d - b\epsilon_c - c\epsilon_b + \epsilon_a \epsilon_d - \epsilon_b \epsilon_c,$$

folglich ist A' invertierbar, falls

$$|ad - bc| > |a\epsilon_d + \epsilon_a d - b\epsilon_c - c\epsilon_b + \epsilon_a \epsilon_d - \epsilon_b \epsilon_c|. \quad (28)$$

Die Dreiecksungleichung liefert

$$|a\epsilon_d + \epsilon_a d - b\epsilon_c - c\epsilon_b + \epsilon_a \epsilon_d - \epsilon_b \epsilon_c| \leq \epsilon(|a| + |b| + |c| + |d|) + 2\epsilon^2 \quad (29)$$

für

$$\epsilon := \max(|\epsilon_a|, |\epsilon_b|, |\epsilon_c|, |\epsilon_d|).$$

Sind also die Störungen so klein, dass die Ungleichung

$$\epsilon(|a| + |b| + |c| + |d|) + 2\epsilon^2 < |ad - bc| \quad (30)$$

gilt, so ist die Matrix A' invertierbar.

Die Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$2\epsilon^2 + (|a| + |b| + |c| + |d|)\epsilon - |ad - bc|$$

liegen bei

$$\epsilon_{1,2} = -\frac{|a| + |b| + |c| + |d|}{4} \pm \sqrt{\frac{(|a| + |b| + |c| + |d|)^2}{16} + \frac{|ad - bc|}{2}}$$

Da die Ungleichung (30) durch kleine positive ϵ erfüllbar ist, und $\epsilon_2 < 0$ gilt, liefert ϵ_1 eine obere Schranke für die gesuchten Werte von ϵ :

FESTSTELLUNG 95: *Es sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ invertierbar und*

$$\epsilon_1 = -\frac{|a| + |b| + |c| + |d|}{4} + \sqrt{\frac{(|a| + |b| + |c| + |d|)^2}{16} + \frac{|ad - bc|}{2}}.$$

Dann ist jede Matrix $A' \in B(A, \epsilon_1)$ invertierbar.

Die Teilmenge $\text{GL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der invertierbaren Matrizen des metrischen Raums $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, d_{\max})$ ist offen.

◇

Offene Teilmengen eines metrischen Raums »umgeben« jeden ihrer Punkte, oder aus der »Sicht« der Punkte: Alle Punkte einer offenen Menge liegen in ihrem »Inneren«. Für beliebige Teilmengen legt diese Vorstellung es nahe den Begriff eines »inneren Punktes« einzuführen:

DEFINITION 96: Es sei A eine Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) . Ein Punkt $x \in X$ heißt innerer Punkt von A , falls es eine offene Kugel $B(x, r)$ mit der Eigenschaft $B(x, r) \subseteq A$ gibt.

Die Menge A° aller inneren Punkte von A bezeichnet man als das Innere von A .

In Abbildung 12 sind die inneren Punkte x_1, x_2 einer Menge A dargestellt. Wie immer gilt die Konvention, dass durchbrochene Linien nicht zur Menge A dazugehören, durchgezogene Linien schon. Die Punkte x_3, x_4, x_5 sind keine inneren Punkte von A . Der Punkt x_3 liegt im Inneren des Komplements $X \setminus A$; solche Punkte könnte man als äußere Punkte von A bezeichnen.

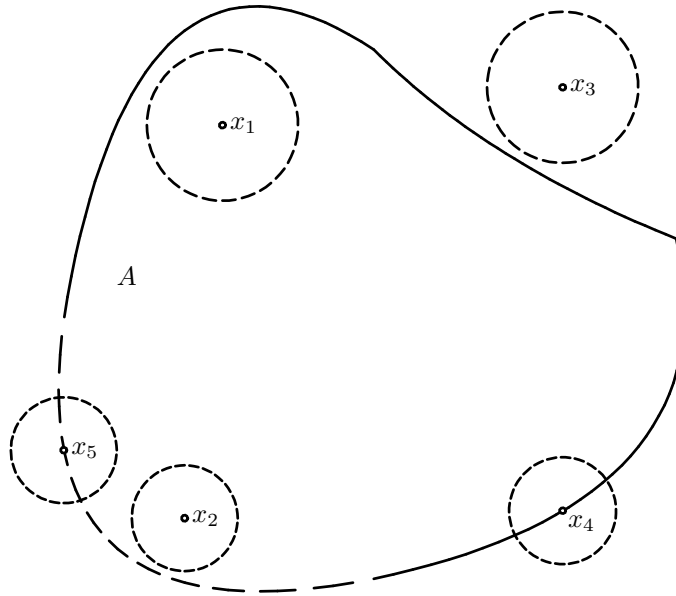


Abbildung 12: Innere, äußere, Berührungs- und Randpunkte einer Menge

BEISPIELE:

- In den reellen Zahlen mit der Standardmetrik gilt: $[a, b]^\circ = (a, b)^\circ = (a, b]$.

- Für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ gilt $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, denn: Sei $q \in \mathbb{Q}^\circ$. Dann gibt es eine Kugel $B(q, r) = (q - r, q + r) \subseteq \mathbb{Q}^\circ$, wobei man $r \in \mathbb{Q}$ annehmen kann, da sich jede reelle Zahl beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren lässt. Die Funktion

$$f(t) := \frac{t + r}{2r}$$

bildet das Intervall $(q - r, q + r)$ bijektiv auf das Intervall $(0, 2)$ ab. Weiter gilt $f(t) \in \mathbb{Q}$, falls $t \in \mathbb{Q}$. Folglich besteht nach Annahme über $(q - r, q + r)$ auch das Intervall $(0, 2)$ nur aus rationalen Zahlen. Dies ist wegen $\sqrt{2} \in (0, 2)$ ein Widerspruch.

- Im metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist das Innere g° jeder Geraden $g \subset \mathbb{R}^2$ leer. Ist nämlich $g = \{x_0 + vt : t \in \mathbb{R}\}$ eine Parameterdarstellung der Geraden und ist $v_1 \neq 0$ ein auf v senkrecht stehender Vektor, so gilt für jedes $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und jedes $x \in g$:

$$x + sv_1 \notin g.$$

Andererseits gilt $d_2(x_0, x_0 + sv_1) = s\sqrt{a^2 + b^2}$, mit $x_1 = (a, b)$. Man sieht, dass in jeder Kugel $B(x, r)$ Punkte außerhalb von g liegen.

- Im metrischen Raum $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$ ist das Innere der Vollkugel

$$K := \{(t_1, t_2, t_3) : t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \leq 1\}$$

die Menge

$$K' := \{(t_1, t_2, t_3) : t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 < 1\}.$$

Ist nämlich $(a, b, c) \in K'$, so gilt $1 - (a^2 + b^2 + c^2) =: r > 0$. Nach der Dreiecksungleichung folgt dann $B((a, b, c), r) \subseteq K'$. Gilt andererseits $(a, b, c) \in K \setminus K'$ und ist $\epsilon > 0$, so gilt $(a, b, c) + \epsilon(1, 1, 1) \notin K$. Damit gibt es in jeder offenen Kugel $B((a, b, c), \epsilon')$ um (a, b, c) Punkte, die nicht zu K gehören. Folglich ist (a, b, c) kein innerer Punkt von K .

SATZ 97: *Das Innere A° einer Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) ist die bezüglich Inklusion $\subseteq$ größte in A enthaltene offene Menge.*

Für die Operation des Bildens des Inneren von Teilmengen eines metrischen Raums gelten die folgenden Regeln:

1. $A^\circ \subseteq A$.

2. $A^\circ = A$ gilt genau dann, wenn A offen ist.
3. $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$,
4. $A^{\circ\circ} = A^\circ$,
5. Für jede Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X gilt: $(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)^\circ \supseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^\circ$.
6. Für jede Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X gilt: $(\bigcap_{i \in \mathcal{A}} A)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in \mathcal{A}} A^\circ$; ist $\mathcal{A}$ endlich, so gilt die Gleichheit.

BEWEIS:

1. Gilt nach Definition.
2. Für eine offene Menge A gilt per Definition $A = A^\circ$. Ist andererseits A eine Teilmenge mit der Eigenschaft $A = A^\circ$, so gibt es nach Definition zu jedem $x \in A$ eine Kugel $B(x, r) \subseteq A$, womit A offen ist.
3. Ist $x \in A^\circ$, so gibt es eine offene Kugel $B(x, r) \subseteq A$. Wegen $A \subseteq B$ gilt dann auch $B(x, r) \subseteq B$ und daher $x \in B^\circ$.
4. A° ist eine offene Menge: Ist nämlich $x \in A^\circ$ und $B(x, r) \subseteq A$, so gibt es wegen der Offenheit von $B(x, r)$ zu jedem $x' \in B(x, r)$ eine offene Kugel $B(x', s) \subseteq B(x, r)$. Folglich ist auch $x' \in A^\circ$, womit sogar $B(x, r) \subseteq A^\circ$ gilt. Dies beweist die Offenheit von A° . Die Behauptung folgt nun aus Punkt 2.
5. Aus $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^\circ$ folgt $x \in A'^\circ$ für ein $A' \in \mathcal{A}$. Folglich gibt es eine offene Kugel $B(x, r) \subseteq A' \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, woraus die Behauptung folgt.
6. Aus $x \in (\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)^\circ$ folgt nach Punkt 3 $x \in A^\circ$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ und damit $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^\circ$.

Es bleibt die Aussage über das Innere zu beweisen: Das Innere ist eine offene, in A enthaltene Menge. Es sei $B \subseteq A$ eine offene Menge mit $A^\circ \subseteq B$. Dann gilt nach Punkt 1 und 2: $A^\circ = A^{\circ\circ} \subseteq B^\circ \subseteq A^\circ$. Also folgt $A^\circ = B^\circ = B$ wegen der Offenheit von B . $\square$

Die Punkte x_4 und x_5 in Abbildung 12 zeigen, dass es neben den inneren und äußeren Punkten einen weiteren Punktyp bezogen auf Teilmengen eines metrischen Raums gibt. Dieser soll nun beschrieben werden, wobei es aus konzeptionellen Gründen besser ist sogar zwei neue Punktypen einzuführen, wie wir gleich sehen werden.

DEFINITION 98: Es sei A Teilmenge des metrischen Raums (X, d) . Ein Punkt $x \in X$ heißt Berührungspunkt von A , falls $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ für jedes $r > 0$ gilt. Die Menge aller Berührungspunkte von A nennt man den Abschluss von A und bezeichnet sie mit $\overline{A}$.

Offensichtlich ist jeder Punkt $x \in A$ Berührungspunkt von A , das heißt es gilt $A \subseteq \overline{A}$.

BEISPIELE:

- Die Zahlen a und b sind Berührungspunkte des Intervalls $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$. In jeder offenen Kugel $B(a, r) = (a-r, a+r)$ liegt nämlich ein Punkt von I . Analog für b .
- Es seien $0 < r < R$ zwei positive reelle Zahlen und

$$A := \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : r^2 < t_1^2 + t_2^2 < R^2\},$$

A ist also ein Kreisring mit dem inneren Radius r und dem äußeren Radius R , wobei die jeweiligen inneren und äußeren Kreislinien

$$K_r := \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : t_1^2 + t_2^2 = r^2\}, K_R := \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : t_1^2 + t_2^2 = R^2\}$$

nicht zu A zählen. Neben den Punkten von A selbst sind allerdings die Punkte auf diesen beiden Kreislinien Berührungspunkte von A .

Die offenen Mengen sind genau die Teilmengen eines metrischen Raums, die gleich ihrem Inneren sind. Es liegt nahe etwas Ähnliches mit den abgeschlossenen Mengen zu tun:

DEFINITION 99: Eine Teilmenge A des metrischen Raums (X, d) heißt abgeschlossen, falls $\overline{A} = A$ gilt.

Der Zusammenhang zwischen offenen und abgeschlossenen Mengen wird durch das nächste Resultat geklärt:

SATZ 100: Eine Teilmenge A ist abgeschlossen genau dann, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

BEWEIS: Ist A abgeschlossen und $x \notin A$, so ist x kein Berührungspunkt von A . Folglich gibt es ein $r > 0$ mit $B(x, r) \cap A = \emptyset$, was äquivalent zu $B(x, r) \subseteq X \setminus A$ ist. Also ist $X \setminus A$ offen.

Ist andererseits $X \setminus A$ offen und $x \in X$ ein Berührungspunkt von A , so muss $x \in A$ gelten, da es sonst offene Kugeln gibt, die A nicht schneiden. $\square$

Wie das Bilden des Inneren gehorcht auch das Bilden des Abschlusses bestimmten Gesetzmäßigkeiten:

SATZ 101: *Der Abschluss ist die bezüglich Inklusion $\subseteq$ kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die A enthält.*

1. $A \subseteq \overline{A}$,
2. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$,
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
4. Für jede Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X gilt $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} \supseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$; ist $\mathcal{A}$ endlich, so gilt die Gleichheit.
5. Für jede Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X gilt $\overline{\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$.

BEWEIS: 1. Die Aussage folgt direkt aus der Definition von Berührungspunkten.

2. Ist $x \in \overline{A}$, so schneidet jede Kugel $B(x, r)$ die Menge A , also wegen $A \subseteq B$ auch die Menge B . Es folgt $x \in \overline{B}$.

3. Nach Punkt 2 gilt $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$. Es sei nun $x \in \overline{\overline{A}}$, jede Kugel $B(x, r)$ schneidet also $\overline{A}$. Ist $y \in B(x, r) \cap \overline{A}$, so gibt es wegen der Offenheit von $B(x, r)$ eine Kugel $B(y, s) \subseteq B(x, r)$. Jede Kugel $B(y, s')$ schneidet A , weil y Berührungspunkt von A ist. Folglich schneidet $B(x, r)$ die Menge A . Die Kugel $B(x, r)$ war aber beliebig, folglich ist $x \in \overline{A}$ und die Behauptung bewiesen.

4. Es sei $x \in \overline{A'}$ für ein $A' \in \mathcal{A}$. Dann schneidet jede Kugel $B(x, r)$ die Menge A' , also auch die Menge $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, womit die Inklusion $\supseteq$ beweisen ist.

Es gelte nun $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Ist $x \in \overline{A_1 \cup \dots \cup A_m}$, so schneidet jede Kugel $B(x, r)$ eine der Mengen A_i . Es sei (r_k) eine positive, gegen 0 konvergente Folge reeller Zahlen. Nach dem Schubfachprinzip gibt es ein A_j , das von unendlich vielen der Kugeln $B(x, r_k)$ geschnitten wird. Es sei (r_{k_i}) die zugehörige Folge der Radien dieser Kugeln. Die Folge konvergiert als Teilfolge von (r_k) gegen 0. Ist daher $B(x, r)$ eine beliebige Kugel, so gibt es

ein $r_{k_\ell} < r$ und daher gilt $B(x, r_{k_\ell}) \subseteq B(x, r)$. Nach Konstruktion schneidet $B(x, r_{k_\ell})$ die Menge A_j , also auch die Kugel $B(x, r)$, womit $x \in \overline{A_j}$ gilt.

5. Es sei $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$. Dann schneidet jede Kugel $B(x, r)$ die Menge $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, also jede der Mengen $A \in \mathcal{A}$, womit $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$ gilt. $\square$

Wir kehren nun zurück zum Thema der Klassifikation von Punkten.

DEFINITION 102: *Es sei A eine Teilmenge des metrischen Raums (X, d) . Ein Punkt $x \in X$ heißt Randpunkt von A , falls x Berührungspunkt von A und von $X \setminus A$ ist. Die Menge $\text{Rd}(A)$ aller Randpunkte von A wird als Rand von A bezeichnet.*

In der Abbildung 12 sind die Punkte x_4 und x_5 Randpunkte von A , wobei $x_5 \in A$ aber $x_4 \notin A$ gilt.

SATZ 103: *Für jede Teilmenge A eines metrischen Raums gilt*

$$\overline{A} = A^\circ \cup \text{Rd}(A).$$

BEWEIS: Wie sehr häufig bei Gleichungen zwischen Mengen beweist man die Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ getrennt voneinander.

Im vorliegenden Fall ist die Inklusion $\supseteq$ wegen $A^\circ \subseteq A$ und $\text{Rd}(A) \subseteq \overline{A}$ klar.

Um die Inklusion $\subseteq$ zu beweisen, genügt es Punkte $x \in \overline{A} \setminus A^\circ$ zu betrachten und für diese $x \in \text{Rd}(A)$ zu zeigen. Für einen solchen Punkt liegt keine offene Kugel $B(x, r)$ vollständig in A , womit jede solche Kugel Elemente aus $X \setminus A$ und Elemente von A enthält. Also ist $x \in \text{Rd}(A)$. $\square$