6. Übungsblatt zur Vorlesung
Lineare Optimierung

1.Aufgabe: In dieser Aufgabe sollen Sie sich noch einmal die Notationen aus der Vorlesung in Erinnerung rufen, da diese im gesamten weiteren Verlauf der Vorlesung benutzt werden: Es seien A und $\vec{x}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weiter seien die Index-Teilmengen

$$B := \{2,3,5\} \quad \text{und} \quad N := \{1,2,3,4,5\} \setminus B = \{1,4\}$$

gegeben.

a) Geben Sie explizit die Matrizen A_B und A_N an.

b) Geben Sie explizit die Vektoren $\vec{x}_B$ und $\vec{x}_N$ an.

c) Überprüfen Sie die Gleichung

$$A\vec{x} = A_B\vec{x}_B + A_N\vec{x}_N$$

durch explizite Rechnung.

2.Aufgabe: Wir betrachten noch einmal das LOP, was bereits in Aufgabe2, Blatt1, gelöst wurde und in Aufgabe1, Blatt4 auf Standard-Gleichungsform gebracht wurde: Gegeben sei

$$F(x,y) := 300x + 500y \overset{!}{\to} \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 170 \\ x + y &\leq 150 \\ 3y &\leq 180 \end{aligned}$$

mit $x, y \geq 0$. Dieses Optimierungsproblem hat die Standard-Ungleichungsform. In Aufgabe1, Blatt4 hatten wir dieses Problem auf Standard-Gleichungsform transformiert,

$$F(x,y,s_1,s_2,s_3) := 300x + 500y \overset{!}{\to} \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x + 2y + s_1 &= 170 \\ x + y + s_2 &= 150 \\ 3y + s_3 &= 180 \\ x, y, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \,. \end{aligned}$$

Der zulässige Bereich des Problems in Standard-Gleichungsform ist also gegeben durch

$$P_=(A, \vec{b}) \;=\; \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\vec{x} = \vec{b} \,\wedge\, \vec{x} \geq \vec{0}\,\}$$

mit $\vec{x} = (x, y, s_1, s_2, s_3) =: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 170 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zunächst, mit Hilfe des Satzes 4.3 aus der Vorlesung, sämtliche Ecken von $P_=(A, \vec{b})$ bestimmen und dann F maximieren, indem wir F auf jedem Eckpunkt evaluieren:

a) Geben Sie, für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$, sämtliche k-elementigen Teilmengen $B = \{j_1, \cdots, j_k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an. Machen Sie das in möglichst systematischer Art und Weise. Wie viele k-elementige Teilmengen der n-elementigen Menge $\{1, \cdots n\}$ gibt es?

b) Für jedes $B = \{j_1, \cdots, j_k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ aus (a) sei, wie in der Vorlesung definiert,

$$A_B \;:=\; \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_{j_1} & \cdots & \vec{a}_{j_k} \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times k}, \quad \text{und} \quad \vec{x}_B \;=\; \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

Untersuchen Sie die Spaltenvektoren von A_B auf lineare Unabhängigkeit. Falls diese gegeben ist, untersuchen Sie dann das Gleichungssystem $A_B \vec{x}_B = \vec{b}$ auf Lösbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Lösung $\vec{x}_B$. Das ist etwas mühselig.

c) Es bezeichne $N := \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus B$ das Komplement von B, so dass $B \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Setzen Sie $\vec{x}_N := \vec{0}$ und $\vec{x} = (\vec{x}_B, \vec{x}_N)$. Dieses $\vec{x}$ ist ein Kandidat für eine Ecke. Dabei ist die Notation so zu verstehen, dass, falls etwa $B = \{2, 3, 5\}$ und damit also $N = \{1, 4\}$, und falls etwa $\vec{x}_B = (77, 88, 99)$, dann ist

$$\vec{x} \;=\; (\vec{x}_B, \vec{x}_N) \;=\; (0, 77, 88, 0, 99) \;\in\; \mathbb{R}^5 \,.$$

Geben Sie jetzt für jede Teilmenge B aus (a) das entsprechende $\vec{x} = (\vec{x}_B, \vec{x}_N) \in \mathbb{R}^5$ an. Nach Satz 4.3 aus der Vorlesung ist ein solches $\vec{x}$ genau dann eine Ecke von $P_=(A, \vec{b})$, falls es die Bedingung $\vec{x} \geq \vec{0}$ erfüllt. Geben Sie damit jetzt alle Ecken von $P_=(A, \vec{b})$ an. Sie sollten 5 Ecken finden.

d) Bestimmen Sie dann das Maximum von F, indem Sie das F auf jeder der fünf Ecken evaluieren.