

## 10. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Optimierung

**1. Aufgabe:** Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem in Standard-Gleichungsform: Maximieren Sie die Funktion

$$F(x, y, z) = x + y \rightarrow \max$$

unter den Nebenbedingungen  $x, y, z \geq 0$  und

$$\begin{aligned}x + y + z &= 4 \\x + 3y + 4z &= 8\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie eine Start-Ecke für dieses Problem mit Hilfe der Phase-I-Methode.
- Lösen Sie dann das LOP mit Hilfe des Simplex-Algorithmus in Tableau-Form. Welchen Wert hat das Maximum von  $F$  und wo wird das Maximum angenommen?

**2. Aufgabe:** In der Vorlesung haben wir folgendes LOP in Standard-Ungleichungsform betrachtet:

$$F(x, y) = x + 3y \rightarrow \max$$

unter den Nebenbedingungen  $x, y \geq 0$  und

$$\begin{aligned}x - 2y &\leq -2 \\x + y &\leq 2\end{aligned}$$

Die Standard-Gleichungsform haben wir dann auf eine Form mit positiver rechter Seite gebracht,  $F(x, y, s_1, s_2) = x + 3y \rightarrow \max$  unter den Nebenbedingungen  $x, y, s_1, s_2 \geq 0$  und

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit  $\vec{x} = (x, y, s_1, s_2)$  und

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \vec{0}.$$

Da in der 4. Spalte von  $A$  bereits ein (nicht negativer) Einheitsvektor steht, muss man zur Durchführung des Phase-I-Verfahrens in diesem Fall keine 2 neuen Hilfsvariablen  $v_1$  und  $v_2$

einführen, sondern ein einziges  $v_1$  'als Ersatz für den negativen Einheitsvektor in der 3.Spalte' reicht aus. Wir betrachten also das Hilfs-LOP

$$HF(v_1) = HF(x, y, s_1, s_2, v_1) := v_1 \stackrel{!}{\rightarrow} \min \quad (1)$$

unter den Nebenbedingungen  $\tilde{x} = (\vec{x}, v_1) = (x, y, s_1, s_2, v_1) \geq \vec{0}$  und

$$\tilde{A}\tilde{x} = A\vec{x} + \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{b} \quad (2)$$

mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \vec{0}.$$

- a) Lösen Sie das Hilfs-LOP (1,2) mit Hilfe des Simplex-Algorithmus. Damit erhalten Sie eine Start-Ecke für das eigentliche LOP, wie lautet diese Ecke?
- b) Lösen Sie dann das eigentliche LOP mit Hilfe des Simplex-Algorithmus und mit Hilfe des End-Tableaus aus Teil (a). Welchen Wert hat das Maximum von  $F$  und wo wird das Maximum angenommen?