Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

SS 2016

Probe-Klausur zur Vorlesung
Lineare Optimierung

Theorie-Teil:

1.Aufgabe (10 Punkte): Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Produkte P_1 und P_2 her. Zur Produktion von P_1 sind 7 Einheiten von R_1, 5 Einheiten R_2 und 3 Einheiten R_3 nötig, für P_2 benötigt man 4 Einheiten R_1 und 2 Einheiten R_3. Das Unternehmen hat 400 Einheiten R_1, 300 Einheiten R_2 und 75 Einheiten R_3 zur Verfügung. Mit jedem Produkt P_1 macht das Unternehmen 15 Euro Gewinn und mit jedem Produkt P_2 10 Euro Gewinn. Wie viele Stücke von P_1 und P_2 sollte das Unternehmen produzieren, wenn der Gewinn maximiert werden soll?

Formulieren Sie dieses Problem als mathematisches Optimierungsproblem. (Sie müssen das mathematische Problem dann nicht lösen.)

2.Aufgabe (15 Punkte): Lösen Sie folgendes lineare Optimierungsproblem

$$F(x,y,z) \quad = \quad 5x + 4y + 3z \;\to\; \max$$

unter den Nebenbedingungen $x, y, z \geq 0$ und

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &\leq 5 \\ 4x + y + 2z &\leq 11 \\ 3x + 4y + 2z &\leq 8 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.

3.Aufgabe (15 Punkte): Betrachten Sie das lineare Optimierungsproblem $F(x,y) = 2x + y \to \min$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x - y &\geq -1 \\ x &\geq 2 \\ y &\geq 3 \end{aligned} \tag{1}$$

a) Lösen Sie dieses Problem graphisch durch Skizzieren in der (x,y)-Ebene.

b) Geben Sie das duale Optimierungsproblem an.

c) Lösen Sie das duale Problem mit dem Simplex-Algorithmus und verifizieren Sie, dass die Zielfunktionen des primalen und dualen Problems dieselben Optimalwerte haben.

d) Aus dem End-Simplextableau des dualen Problems lässt sich die Lösung des primalen Problems ablesen, wo genau?

Programmier-Teil:

4.Aufgabe (10 Punkte): Lösen Sie das LOP aus Aufgabe 2 numerisch mit Hilfe der R-Software. Geben Sie explizit die folgenden Grössen an:

a) den Maximalwert von F

b) die Stelle $(x_{\text{max}}, y_{\text{max}}, z_{\text{max}})$, an der das Maximum angenommen wird

c) die Anzahl der (Phase-II-) Iterationen, die der Algorithmus benötigt hat, um das Maximum zu finden.

5.Aufgabe (10 Punkte): Es sei $n = 500$ und $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{c} &= (1, 1, \cdots, 1, 1) \\ \vec{b} &= (1, 2, \cdots, n-1, n) \end{aligned}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie numerisch mit Hilfe der R-Software folgendes LOP:

$$F(\vec{x}) := \vec{c} \cdot \vec{x} \to \max$$

unter den Nebenbedingungen $\vec{x} \geq \vec{0}$ und $A\vec{x} \leq \vec{b}$. Geben Sie explizit die folgenden Grössen an:

a) den Maximalwert von F

b) die Stelle $\vec{x}_{\text{max}}$, an der das Maximum angenommen wird. Erstellen Sie einen Plot der Punkte $(i, x_{\text{max},i})_{i=1}^{500}$.

c) die Anzahl der (Phase-II-) Iterationen, die der Algorithmus benötigt hat, um das Maximum zu finden.

d) die benötigte Rechenzeit.